



Physical &
Applied Sci
Serials

*Physical &
Applied Sci.
Serials*



Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

*Physical &
Applied Sci.
Serials*

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

17021. Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quasi des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME DIX-NEUVIÈME. — ANNÉE 1890-91.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1891

QA

1

S59

t.19

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

MM.

1873	CHASLES.
1874	LAFFON DE LADÉBAT.
1875	BIENAYMÉ.
1876	DE LA GOURNERIE.
1877	MANNHEIM.
1878	DARBOUX.
1879	O. BONNET.
1880	JORDAN.
1881	LAGUERRE.
1882	HALPHEN.
1883	ROUCHÉ.
1884	PICARD.
1885	APPELL.
1886	POINCARÉ.
1887	FOURET.
1888	LAISANT.
1889	ANDRÉ.
1890	HATON DE LA GOUPIILLIÈRE.
1891	COLLIGNON.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

BENOIST, docteur en droit.
BIENVENUE, membre de l'Institut (décédé).
BIOCHE, professeur de Mathématiques.
BISCHOFFSHEIM, membre de l'Institut.
BORCHARDT, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé).
BROCARD, chef de bataillon du Génie.
CANET, ingénieur civil.
CHASLES, membre de l'Institut (décédé).
CLAUDE-LAFONTAINE, banquier.
FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique.
GAUTHIER-VILLARS, imprimeur-éditeur.
HALPHEN, membre de l'Institut (décédé).
HATON DE LA GOLIPIÈRE, membre de l'Institut.
HERMITE, membre de l'Institut.
HIRST, directeur des études de l'École navale de Greenwich.
JORDAN, membre de l'Institut.
LAFFON DE LADÉBAT, vice-amiral (décédé).
MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique.
MERCEBEAU, licencié ès sciences mathématiques.
PEROTT (Joseph).
PERRIN, ingénieur en chef des Mines.
POINCARÉ, membre de l'Institut.
POLIGNAC (prince C. DE).
RAFFY, maître de Conférences à la Faculté des Sciences.
SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald.
TANNERY (Paul), directeur des manufactures de l'État.
TARRY, receveur des Contributions diverses.
TCHÉBICHEFF, membre de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg.
VIELLARD, manufacturier (décédé).

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1891 ⁽¹⁾.

Membres honoraires du Bureau	{	MM. BERTRAND. CREMONA. DARBOUX. HERMITE. TCHÉBICHEFF.
--------------------------------------	---	---

Président	MM.	COLLIGNON.
Vice-Présidents	{	DE COMBEROUSSE. HUMBERT. PICQUET. VICAIRE.
Secrétaires	{	KOENIGS. RAFFY.
Vice-Secrétaires	{	CARVALLO. L. LÉVY.
Archiviste		D'OCAGNE
Trésorier		CLAUDE-LAFONTAINE.

Membres du Conseil ⁽²⁾	{	ANDRÉ, 1893. APPEL, 1894. FOURET, 1893. GOURSAT, 1892. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, 1894. JORDAN, 1892. LAISANT, 1892. MANNHEIM, 1894. PICARD, 1894. POINCARÉ, 1893. DE PRESLES, 1892. ROUCHÉ, 1893.
---	---	---

⁽¹⁾ MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

⁽²⁾ La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
l'admission

1872. ACHARD, directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 bis, à Paris.
1887. ALBEGGIANI (M.-L.), professeur à l'Université, Salita Banditore, 4, à Palerme (Italie).
1881. AMIGES, professeur au lycée, boulevard du Musée, 66, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1872. ANDRÉ (Désiré), docteur ès Sciences, rue Gay-Lussac, 17, à Paris.
1890. ANTONARI, professeur de Mathématiques, rue Vavin, 5, à Paris.
1879. APPELL, professeur à la Faculté des Sciences, rue Le Verrier, 6, à Paris.
1884. ARNAUD, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Nice (Alpes-Maritimes).
1872. ARON (Henri), banquier, rue du Quatre-Septembre, 18, à Paris.
1881. ASTOR, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard de Bonne, à Grenoble (Isère).
1882. AUTONNE, ingénieur des Ponts et Chaussées, place d'Helvétie, 7, à Lyon (Rhône).
1888. BAPST (Germain), faubourg Saint-Honoré, 215, à Paris.
1886. BARBERENA, ingénieur topographe, à San-Salvador.
1889. BEGUIN (Maurice), boulevard Saint-Germain, 63, à Paris.
1874. BENOIST (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, 3, à Chalon-sur-Saône (Saône-et-Loire), S. P. (1).
1875. BERDELLÉ, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
1873. BERTHARD (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, membre de l'Académie française, rue de Tournon, 1, à Paris.
1887. BEYEYS (Ignacio), capitaine du Génie, Santa Inés, 5, à Cadix (Espagne).
1872. BIENAYMÉ (Arthur), directeur des constructions navales, au Ministère de la Marine, à Paris.
1888. BIOCHE, professeur au Lycée Michelet, rue de Madame, 34, à Paris, S. P.
1875. BISCHOFFSHEIM, membre de l'Institut, rue Taitbout, 3, à Paris, S. P.
1890. BJERKNES, au Laboratoire de Physique, à Bonn (Allemagne).
1881. BOXCOMPAGNI (le prince Balthasar), palais Piombino, place Colonna, à Rome (Italie).
1873. BOULANGER, professeur de Mathématiques, rue Constantine, 101, à Mustapha inférieur (Algérie).
1886. BRAULT (A.), boulevard de Toulouse, 362, à Bordeaux (Gironde).
1874. BRIOSCHI, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École Polytechnique, à Milan (Italie).
1872. BRISE (Ch.), professeur à l'École Centrale, rue Vauquelin, 15, à Paris.
1873. BROCARD, chef de bataillon du Génie, à Valence (Drôme).
1886. BRUNEL, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1888. CAVET (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'artillerie à la Société des Forges de la Méditerranée, avenue de Malakoff, 91, à Paris. S. P.
1885. CARON, professeur de Géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 82, à Paris.
1887. CARVALLO, examinateur à l'École Polytechnique, villa Saïd, 19, Passy-Paris.
1884. CASEY (John), professeur à l'Université catholique de Dublin, Stephens Green, 86, à Dublin (Grande-Bretagne).
1887. CASPARY, professeur au Collège Humboldt, à Berlin (Allemagne).
1873. CATALAN, professeur émérite à l'Université, 21, rue des Éburons, à Liège (Belgique).
1887. CERRUTI, professeur à l'Université, à Rome (Italie).
1888. CHAILAN (Edouard), rue Berthollet, 14, à Paris.

(1) Les initiales S. P. désignent les Sociétaires perpétuels.

Date
de
l'admission.

1881. CHEMIN, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, avenue de l'Alma, 12, à Paris.
1884. CHRYSAL, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
1873. CIVALE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de la Tour-des-Dames, 2, à Paris.
1875. CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris, S. P.
1872. COLLIGNON, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.
1890. COLOT, au château du Seuil, à Cérons (Gironde).
1875. COMBROUSSE (DE), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École Centrale, rue Saint-Lazare, 94, à Paris.
1872. COURCELLES, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
1884. CRAIG (Thomas), professeur à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
1877. CREMONA, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome (Italie).
1880. CRETIN, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1872. DARBOUT, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
1885. DAUTHVILLE, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1881. DEFFORGES, chef de bataillon d'infanterie, attaché à l'Etat-major du Ministre de la Guerre, boulevard Latour-Maubourg, 41, à Paris.
1882. DELANVOY, sous-intendant militaire en retraite, à Guéret (Creuse).
1885. DEMARTRES, professeur à la Faculté des Sciences, à Lille (Nord).
1883. DERUYTS, docteur ès sciences, chargé de Cours à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
1872. DEWULF, général commandant le Génie de la 15^e région, boulevard Rabuteau, 2, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1882. DREIFUS (Camillo), député, rue de l'Université, 195, à Paris.
1886. DUCAN, assistant à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
1872. DURRANDE, doyen de la Faculté des Sciences, à Poitiers (Vienne).
1885. DYCK (Walther), professeur au Polytechnicum, à Munich (Bavière).
1881. ESCARY, professeur au Lycée, à Constantine (Algérie).
1873. FABRE, ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard des Batignolles, 84, à Paris.
1888. FABRY, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1885. FERRAZ, professeur au Lycée, à Toulouse (Haute-Garonne).
1885. FIELDS (John), professeur à Hamilton (Canada).
1881. FLOQUET, professeur à la Faculté des Sciences, rue Saint-Lambert, 17, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1872. FLYE SAINTE-MARIE, répétiteur à l'École Polytechnique, rue du Sommerard, 12, à Paris.
1889. FOUCHÉ, professeur de Mathématiques, rue Soufflot, 5, à Paris.
1872. FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris, S. P.
1872. GABRIEL, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, agrégé de la Faculté de Médecine, rue Joubert, 39, à Paris.
1872. GAUTHIER-VILLARS, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris, S. P.
1890. GEBBIA, professeur à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. GENTY, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Oran (Algérie).

Date
de
l'admission.

1889. GEORGIAN.
1890. GERBALDI, professeur à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. GERONO, ancien professeur de Mathématiques, rue Hallé, 32 et 34, à Paris.
1872. GOFFART, rue Nollet, 57. Paris.
1881. GOURSAT, maître de Conférences à l'École Normale supérieure, boulevard Raspail, 216, à Paris.
1872. GRAINDORGE, professeur à l'Université, rue Paradis, 92, à Liège (Belgique).
1881. GRUEY, directeur de l'Observatoire, à Besançon (Doubs).
1880. GUCCIA (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Italie).
1881. GUNTHER (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. GUYOU, capitaine de frégate, rue de l'Université, 13, à Paris.
1873. HAAG, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Chardin. 1, à Paris.
1882. HABICH, directeur de l'École des mines, à Lima (Pérou).
1872. HATON DE LA GOEPILLIÈRE, membre de l'Institut, inspecteur général des Mines, directeur de l'École des Mines, boulevard Saint-Michel, 60, à Paris, S. P.
1872. HENRY, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Privas (Ardèche).
1882. HENRY (Charles), bibliothécaire à la Sorbonne, 2, rue Jean-de-Beauvais, à Paris.
1873. HERMITE, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris, S. P.
1875. HIRST, Athenæum Club, Londres (Angleterre), S. P.
1879. HOLST (Eling), stipendiat de l'Université, Pilestrade, 49, à Christiania (Norvège).
1872. HOUBIGANT, chef de bataillon du Génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
1872. HUGO (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, rue des Saints-Pères, 14, à Paris.
1880. HUMBERT, ingénieur des Mines, répétiteur à l'École Polytechnique, 16, boulevard Malesherbes, à Paris.
1887. IBRAHIM EFFENDI, professeur de Mathématiques à l'École impériale civile de Médecine, à Constantinople (Turquie).
1881. IMBER, professeur à l'École Colbert, rue Château-Landon, 27, à Paris.
1887. ISSALA (l'abbé), boulevard de Caudéran, 365, à Bordeaux (Gironde).
1873. JAVIN, chef d'escadron au 17^e régiment d'Artillerie, à la Fère (Aisne).
1872. JAVARY, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris.
1889. JONQUIÈRE (Alfred). Docteur en Philosophie, rue Fédérale, 10, à Berne (Suisse).
1872. JORDAN, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varenne, 48, à Paris, S. P.
1872. JOUFFRET, lieutenant-colonel d'Artillerie, à Bourges (Cher).
1875. JUNG, professeur à l'Institut technique supérieur, via Principe Umberto, 7, à Milan (Italie).
1880. KÆNIGS, maître de conférences à l'École Normale supérieure, boulevard de Port-Royal, 72, à Paris.
1890. KÖBB (Gustaf), Gothenbourg (Suède).
1882. KRONECKER (Dr Léopold). professeur à l'Université, Bellevuestrasse, 13, à Berlin (Allemagne).
1881. LACOR, professeur de Mathématiques, 10, rue Stanislas, à Paris.
1890. LAGERBORG (M^{lle}), à Helsingfors (Finlande).

Date
de
l'admission.

1873. LAISANT, député, docteur ès sciences, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris.
1875. LAQUIÈRE, administrateur de la commune mixte de Palestro (département d'Alger).
1873. LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
1881. LAVEISSIÈRE, rue de la Verrerie, 58, à Paris.
1880. LÉAUTÉ, membre de l'Institut, directeur des études à l'école Monge, boulevard Malesherbes, 141, à Paris.
1872. LEMOINE (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, rue Littré, 5, à Paris.
1879. LE PAIGE, professeur à l'Université, rue des Anges, 21, à Liège (Belgique).
1882. LE PONT, rue Saint-Jacques, 247, à Paris.
1872. LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1882. LEVY (Léon), ingénieur en chef des Mines, rue de Logelbach, 9, à Paris.
1882. LÉVY (Lucien), examinateur à l'École Polytechnique, rue de Condé, 29, à Paris.
1872. LÉVY (Maurice), membre de l'Institut, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur au Collège de France, boulevard Saint-Germain, 258, à Paris.
1875. LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1873. LIGUINE, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
1877. LINDEMANN, professeur à l'Université, Fragheimer-Pulverplatz, 5, à Königsberg (Allemagne).
1886. LIOTVILLE, ingénieur des poudres, répétiteur à l'École Polytechnique, rue des Écoles, 6 bis, à Paris.
1880. LORIV, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Faubourg-Saint-Honoré, 186, à Paris.
1872. LUCAS (Édouard), professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne, rue Boutarel, 1, à Paris.
1888. LUCAS (Félix), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, avenue du Trocadéro, 19, à Paris.
1886. LYON, docteur ès sciences mathématiques, au bureau de M. le Baron de Gunsbourg, à Saint-Petersbourg (Russie).
1882. MACÉ DE LÉPINAY, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV, boulevard Saint-Michel, 14, à Paris.
1872. MALEYX, professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 44, à Paris.
1875. MALLOIZEL, professeur de Mathématiques, rue de l'Estrapade, 17, à Paris.
1872. MANNHEIM, colonel d'Artillerie, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris-Passy, S. P.
1872. MARSILLY (le général de), rue Chante-Pinot, à Auxerre (Yonne).
1884. MARTIN (Artemas), U. S. Coast and geodesic Survey Office, Washington D. C. (Etats-Unis d'Amérique).
1889. MARTIN, ancien élève de l'École polytechnique, professeur de Mathématiques, rue Lhomond, 60, à Paris.
1890. MASSIEL, inspecteur général des Mines, avenue d'Antin, 18, à Paris.
1886. MAXIMOVITCH (Vladimir), professeur à l'Université, rue Timofeïoska, 8, à Kiew (Russie).
1889. MEYDIZABAL TAMBOREL (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, 1^{er} de Cora, n° 1 1/2, Orizaba (Mexique).
1881. MERCEREAU, licencié ès Sciences, boulevard Saint-Michel, 121, à Paris. S. P.
1873. MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1872. MOUTARD, inspecteur général des Mines, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1888. MUKHOPADHYAY (Asutosh), professeur de Mathématiques, Russa Road, 77, North Bhopalipore, à Calcutta (Inde).

Date
de
l'admission

1885. NEUBERG, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1882. OCAGNE (D'), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1873. OVIDIO (Enrico D'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1888. PAPELIER (Georges), professeur de Mathématiques spéciales au lycée, quai Barren-tin, 22, à Orléans (Loiret).
1884. PARAF, maître de Conférences à la Faculté des Sciences, rue du Faubourg-Stanis-las, 59, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1872. PARMENTIER (le général), rue du Cirque, 5, à Paris.
1872. PARRAY, ingénieur en chef des Mines, rue des Saints-Pères, 56, à Paris.
1882. PATURET, ancien élève de l'École Polytechnique, à Valegnat, par Bellenaves (Allier).
1884. PAUTOXNIER (l'abbé), professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 19, à Paris.
1881. PELLET, professeur à la Faculté des Sciences, rue Blatin, 51, à Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).
1883. PELLETREAU, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Constantine (Algérie).
1874. PERCIN, chef d'escadron d'Artillerie, commandant le 4^e bataillon de forteresse, à Ver-dun (Meuse).
1881. PEROTT (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts), S. P.
1873. PERRIN, ingénieur en chef des Mines, rue Erpell, 5, au Mans (Sarthe), S. P.
1887. PEZZO (DEL), professeur à l'Université, via Gennaro Serra, 75, à Naples (Italie).
1873. PHILIPPON, secrétaire de la Faculté des Sciences, à la Sorbonne, à Paris.
1879. PICARD (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris.
1872. PICQUET, chef de bataillon du Génie, examinateur d'admission à l'École Polytech-nique, rue Bara, 9, à Paris.
1882. POINCARÉ, membre de l'Institut, ingénieur des Mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris, S. P.
1882. POKORNY (Martin), directeur du lycée communal, à Prague (Bohême).
1872. POLIGNAC (prince C. DE), 6, cité Odier, rue Washington, à Paris, S. P.
1877. POUSSET, professeur au lycée, à Poitiers (Vienne).
1877. PRESLE (DE), sous-intendant militaire en retraite, rue Monge, 82, à Paris.
1872. PUTZ (le général), rue Saint-Méry, 98, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
1872. RADAU, rue de Tournon, 12, à Paris.
1883. RAFFY, maître de Conférences à la Faculté des Sciences, boulevard Saint-Michel, 99, à Paris.
1873. RANCY (DE), administrateur de la Compagnie d'assurances *le Soleil*, rue For-tuny, 5, à Paris.
1874. REINACH (baron DE), banquier, rue de la Bourse, 4, à Paris.
1872. RIBAUCCER, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Philippeville (Algérie).
1881. RIBOT, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, rue Jacotot, 1, à Dijon (Côte-d'Or).
1888. ROBIN (Gustave), docteur ès sciences mathématiques, rue Chanoinesse, 2, à Paris.
1872. RODET, ingénieur à la Manufacture des tabacs, quai d'Orsay, 63, à Paris.
1872. ROUART, ingénieur civil, boulevard Voltaire, 137, à Paris.
1872. ROUCHÉ (Eugène), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.
1885. ROQUET, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, place de l'École-d'Artille-rie, 2, à Toulouse (Haute-Garonne).

Date
de
l'admission.

1872. ROUSSELIN, professeur au lycée Fontanes, rue du Rocher, 35, à Paris.
1888. RUSSO (Giovanni), professeur, Discesa Case Arse, 2, Catanzaro (Italie).
1881. SAINT-PAUL (DUCRP DE), sous-directeur d'Artillerie à l'Arsenal de Toulouse (Haute-Garonne).
1889. SARAZ, professeur de Mathématiques, 60, rue Monsieur-le-Prince, Paris.
1872. SARRAU, membre de l'Institut, ingénieur en chef des Poudres, professeur à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 bis, à Saint-Mandé (Seine).
1872. SARTIAUX, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, chef adjoint de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. SAUVAGE, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1881. SCHLEGEL (Dr Victor), à Hagen (Allemagne).
1881. SCHOUTE, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1876. SCHUBERT, professeur, Steindamm, 107, à Hambourg (Allemagne).
1877. SÉGUY, avenue des Gobelins, 28, à Paris.
1882. SÉLIVANOFF (Démétrius), attaché à l'Université, Fontanka, 102, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie).
1883. SIMART, lieutenant de vaisseau, répétiteur à l'Ecole Polytechnique, examinateur d'admission à l'Ecole navale, rue Miroménil, 70, à Paris.
1881. STARKOFF (Alexis), professeur à l'Ecole de Commerce, Deribasowskaja, 6, à Odessa (Russie).
1879. STEPHANOS (Dr Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).
1886. STIELTJES, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Fleurance-Montplaisir, 4, à Toulouse (Haute-Garonne).
1873. STUDNICKA, professeur à l'Université, à Prague (Bohême).
1872. SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norvège), S. P.
1872. TANNERY (Paul), directeur des Manufactures de l'État, rue de Penthhièvre, 38, Paris. S. P.
1875. TANNERY (Jules), sous-directeur de l'Ecole Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris.
1882. TARRY (Gaston), receveur des Contributions diverses, rue Clauzel, à Alger (Algérie), S. P.
1882. TCHEBICHEFF, membre de l'Académie des Sciences, à Saint-Petersbourg (Russie), S. P.
1872. TERRIER, professeur de Mathématiques, rue de Condé, 15, à Paris.
1872. TISSERAND, membre de l'Institut, avenue de l'Observatoire, 5, à Paris.
1873. TISSOT, ancien examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique, à Voreppe (Isère).
1872. TRESCA, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, château de Courtozé, par Vendôme (Loir-et-Cher).
1872. VACQUANT, inspecteur général de l'Université, boulevard Saint-Michel, 12, à Paris.
1884. VANDAME, ancien officier d'Artillerie, rue de la Vignette, 65, à Lille (Nord).
1880. VĀNĚCEK (J.-S.), professeur au lycée, à Kralovĕ Hradec (Autriche).
1885. VĀNĚCEK (M.-M.), professeur, à Kralovĕ Hradec (Autriche).
1890. VASCHY, répétiteur et examinateur à l'Ecole Polytechnique, avenue Bosquet, 68, à Paris.
1876. VICAIRE, ingénieur en chef des Mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.
1888. VITO VOLTERRA, professeur à l'Université de Pise (Italie).
1880. WALCKENAER, ingénieur des Mines, 9, rue Bayard, à Paris.
1879. WEILL, professeur au collège Chaptal et à l'Ecole Monge, 19, rue Thiers, au Vésinet (Seine-et-Oise).

Date
de
l'admission.

1873. WEYR (Dr Edouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohème).
1872. WEYR (Dr Émile), professeur à l'Université, Hauptstrasse, 109, à Vienne, III (Autriche).
1882. WILSON, avenue d'Iéna, 2, à Paris.
1878. WORMS DE ROMILLY, ingénieur en chef des Mines, rue Balzac, 7, à Paris.
1882. ZABOUDSKY, capitaine de l'Artillerie russe, professeur à l'École d'Artillerie, à Saint-Petersbourg (Russie).
1890. ZAREMBA, docteur ès sciences mathématiques, rue d'Ulm, 34, à Paris.
1881. ZEUTHEN, professeur à l'Université, Citadelsvej, 9, à Copenhague (Danemark).
-

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Hollande.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Archiv für Mathematik und Physik</i> (rédacteur Dr Hoppe, Prinzenstrasse, 69. S. W.)	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik</i> (rédacteur M. Lampe).	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik</i> (rédacteurs MM. Kronecker et Weierstrass).	Allemagne.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics</i> , publié par l'Université John Hopkins (rédacteur M. Thomas Craig).	États-Unis d'Amérique.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.....	Société philosophique de Cambridge.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab</i> chez M. Gammenneyer, libraire, Carl Johans Gade, 33, à Christiania.	Norvège.
Coïmbre.....	<i>Jornal de Sciencias matematicas e astronomicas</i> (rédacteur M. Gomes Teixeira).	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik</i> (rédacteurs MM. Foldberg et Juel).	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	Ecole Polytechnique de Delft.	Hollande.
Dresde.....	<i>Zeitschrift für Mathematik und Physik</i> (rédacteur Dr Oscar Schlömilch).	Allemagne.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne
Gand.....	<i>Mathesis</i> (rédacteurs MM. Mansion, à Gand, et Neuberg, à Liège).	Belgique.
Goettingue.....	Société Royale des Sciences de Goettingue.	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Mathematische Annalen</i> (rédacteur M. Félix Klein, à Goettingue).	Allemagne.
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Russie.
Kharkoff.....	Société mathématique de Kharkoff.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.

Luxembourg.....	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis d'Amérique.
Odessa.....	Société mathématique d'Odessa.	Russie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences, à Paris.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques</i> (rédacteurs MM. Darboux et J. Tannery).	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique</i> .	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques élémentaires</i> (rédacteur M. G. de Longchamps).	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques spéciales</i> (rédacteur M. G. de Longchamps).	France.
Paris.....	Institut des Actuaire français.	France.
Palerme.....	<i>Circolo matematico (Rendiconti del)</i> .	Italie.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Prague.	Autriche.
Prague.....	<i>Casopis pro pestování matematiky a fyziky</i> (rédacteur M. Edouard Weyr).	Autriche.
Prague.....	Société mathématique de Prague.	Autriche.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincei</i> .	Italie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm.....	<i>Acta Mathematica</i> (rédact. M. Mittag-Leffler).	Suède.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse</i> .	France.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Venise.....	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik</i> , (rédact. MM. Escherich et Weyr).	Autriche.
Zurich.....	Société des Sciences naturelles de Zurich.	Suisse.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur les surfaces développables ; par M. GUSTAF KÖBB.

Dans ses travaux sur les équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre, M. Picard a donné une méthode pour reconnaître s'il existe une infinité d'intégrales régulières passant par un contour donné. L'emploi de cette méthode peut être étendu, avec quelques restrictions, aux équations non linéaires. Je veux l'appliquer à une équation non linéaire très simple, savoir

$$rt - s^2 = 0,$$

l'équation bien connue des surfaces développables.

Soit z une intégrale régulière de cette équation passant par un contour fermé donné C , et soit

$$z + \zeta$$

une autre intégrale régulière passant par le même contour. Considérons l'intégrale double

$$\iint \zeta [z(z + \zeta) - \varphi(\zeta)] dx dy$$
$$\varphi(\varpi) = rt - s^2,$$

l'intégration étant étendue à tous les points de l'aire limitée par la projection sur le plan des xy du contour C .

Cette intégrale double est évidemment nulle. Nous aurons ainsi

$$(1) \quad \int \int \zeta [\varphi(z + \zeta) - \varphi(z)] dx dy = 0.$$

Il s'agit maintenant de voir si l'équation peut être vérifiée pour des valeurs de ζ qui ne soient pas identiquement nulles. Pour des valeurs de ζ très petites, il suffit de considérer les termes linéaires de la différence

$$\varphi(z + \zeta) - \varphi(z).$$

L'intégrale double (1) deviendra alors

$$(2) \quad \int \int \zeta \left(t \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + r \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - 2s \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right) dx dy.$$

En intégrant par parties, on aura

$$\begin{aligned} \int \int t \zeta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} dx dy &= \int_c t \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} dy - \int \int \left[t \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial t}{\partial x} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] dx dy \\ &= \int_c \left[t \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial t}{\partial x} \zeta^2 \right] dy - \int \int \left[t \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \zeta^2 \right] dx dy; \end{aligned}$$

mais, comme z s'annule au bord du contour C , l'intégrale simple disparaît. On trouve de la même manière

$$\begin{aligned} \int \int r \zeta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} dx dy &= - \int \int \left[r \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \zeta^2 \right] dx dy \\ - \int \int 2s \zeta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} dx dy &= - \int \int \left(-2s \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} \zeta^2 \right) dx dy \end{aligned}$$

et, par conséquent, l'intégrale (2) a pour expression

$$- \int \int \left[t \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + r \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 - 2s \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy.$$

Or on a

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} = 0.$$

Alors l'intégrale (2) deviendra

$$- \int \int \left[t \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + r \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 - 2s \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] dx dy.$$

On voit immédiatement que le déterminant de la forme quadratique sous le signe $\int$ est nul en vertu de l'équation

$$rt - s^2 = 0.$$

Par conséquent, la forme quadratique se réduit à un seul carré, qui peut être écrit de deux manières, ou bien

$$\frac{1}{r} \left(r \frac{\partial \zeta}{\partial y} - s \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2$$

ou bien

$$\frac{1}{t} \left(t \frac{\partial \zeta}{\partial x} - s \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2.$$

Mais pour que l'intégrale double (2) soit nulle, il faut que la forme quadratique soit nulle. Ainsi l'on a

$$r \frac{\partial \zeta}{\partial y} - s \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0,$$

ou

$$t \frac{\partial \zeta}{\partial x} - s \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0.$$

On voit que chacune de ces équations sera vérifiée, si l'on pose

$$\zeta = f \left(k \frac{\partial z}{\partial x} + k_1 \frac{\partial z}{\partial y} \right);$$

ζ doit s'annuler au bord du contour C. On aura ainsi, sur le contour C,

$$0 = f \left(k \frac{\partial z}{\partial x} + k_1 \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Mais, pour toute surface développable, on a

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Par conséquent, sur le contour C, on aura

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \text{const.}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \text{const.},$$

ce qui est impossible, si le contour n'est pas une ligne droite. Ainsi, il ne peut pas exister deux intégrales régulières et infiniment voisines de l'équation

$$rt - s^2 = 0,$$

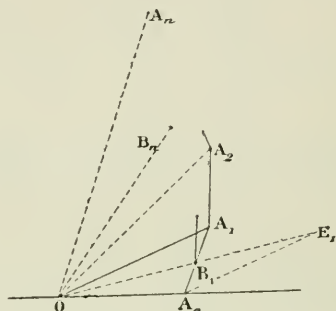
qui passent par le même contour fermé C. On pourrait aussi énoncer ce résultat de la manière suivante : « Par un contour fermé C il ne passe jamais deux surfaces développables, qui n'aient pas de points singuliers et qui soient infiniment voisines l'une de l'autre. »

Propriété géométrique des coefficients du binôme ;

par M. C.-A. LAISANT.

On sait qu'on appelle *myosotis* la figure formée par une série de triangles directement semblables OA_0A_1 , OA_1A_2 , ... accolés successivement les uns aux autres. Nous appellerons le premier de ces triangles OA_0A_1 *base* du myosotis..

Soit un myosotis $OA_0A_1 \dots A_n$ composé de n triangles. Appli-



quons aux sommets $A_0, A_1, \dots, A_n$ des masses proportionnelles aux coefficients $1 = C_0, C_1, \dots, C_n = 1$ du développement de $(x+1)^n$; et proposons-nous de trouver le barycentre de ce système.

Si nous prenons OA_0 pour unité, et si nous posons $OA_1 = \lambda$, nous avons $OA_2 = \lambda^2, OA_3 = \lambda^3, \dots, OA_n = \lambda^n$, et, par conséquent, le barycentre cherché K est donné par

$$\begin{aligned} OK = \kappa &= \frac{C_0 + C_1\lambda + C_2\lambda^2 + \dots + C_n\lambda^n}{C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_n} \\ &= \frac{(1+\lambda)^n}{2^n} = \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^n = OB_1^n, \end{aligned}$$

en désignant par B_1 le milieu de A_0A_1 .

Si donc nous construisons le myosotis $OA_0B_1B_2 \dots B_n$, de base OA_0B_1 , le sommet B_n sera le barycentre cherché.

Il est évident, d'après cela, que l'angle B_nOA_0 est égal à n fois l'angle B_1OA_0 . Quand le triangle de base OA_0A_1 est isocèle, tous les points $A_0, A_1, \dots$ sont sur une même circonférence; et alors OB_n est la bissectrice de $\angle A_nOA_0$.

Quand le triangle OA_0B_1 est isocèle, le barycentre est sur la circonférence de centre O et de rayon OA_0 .

Si l'on prolonge les droites $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$, de telle sorte qu'on ait $OD_1 = C_1 OA_1 = \dots, OD_n = C_n OA_n = OA_n$, il sera aisé de trouver le centre des moyennes distances L des points $A_0, D_1, D_2, \dots, D_{n-1}, A_n$. En effet, on aura

$$(n+1)L = C_0 A + C_1 A^2 + \dots + C_n A^n = (1+A)^n.$$

Si nous prolongeons OB_1 en $OE_1 = 2OB_1$ et si nous construisons le myosotis de base OA_0E_1 , c'est-à-dire $OA_0E_1E_2 \dots E_n$, on aura, par conséquent, $OL = \frac{OE_n}{n+1}$.

Si, enfin, nous construisons $OF_1 = \frac{OA_1}{C_1}, OF_2 = \frac{OA_2}{C_2}, \dots, OF_n = \frac{OA_n}{C_n} = OA_n$, et, si nous appliquons en $A_0, F_1, F_2, \dots, A_n$, des masses proportionnelles aux carrés des coefficients $C_0^2, C_1^2, \dots, C_n^2$, le barycentre G de ce système sera donné par la relation

$$\frac{(2n)!}{n!n!} OG = (1+A)^n = OE_n, \quad OG = \frac{n!n!}{(2n)!} (1)^n$$

On peut remarquer que $OE_n = 2^n OB_n$.

Sur la rectification approximative d'un arc de courbe;

par M. A.-E. PELLET.

1. Sur la tangente en un point M d'une courbe, prenons des longueurs égales de part et d'autre du point M , ML, ML' ; puis sur la normale au point M et du côté du centre de courbure, une longueur égale à trois fois le rayon de courbure MC ; joignons le point C aux points L et L' ; soient P et P' les points de rencontre de $LC, L'C$ avec la courbe; la différence de l'arc PP' et de la ligne LL' est un infiniment petit du 5^e ordre.

En effet, soit

$$y = ax^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + \dots$$

l'équation de la courbe. Son arc, compté à partir du point M ,

aura pour longueur

$$S = x + 2a^2 \frac{x^3}{3} + 3aa_1 \frac{x^4}{2} + (9a_1^2 + 16aa_2 - 4a^4) \frac{x^5}{10} + \dots$$

La ligne ML' est égale à

$$-\frac{x}{1 - \frac{2ay}{3}} = x + \frac{2a^2}{3} x^3 + \frac{2aa_1}{3} x^4 + \left(\frac{2aa_2}{3} + \frac{4a^4}{9} \right) x^5 + \dots$$

et enfin la différence d de l'arc PP' et de la droite LL' est égale à

$$d = \frac{81a_1^2 + 84aa_3 - 76a^4}{45} x^5 + \dots$$

d est une fonction impaire de x .

2. Pour la conique $y = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, il vient

$$y = Ax^2 + 2BAx^3 + (4B^2A + CA^2)x^4 + \dots$$

et

$$d = \frac{660B^2A^2 + 84CA^3 - 76A^4}{45} x^5 + \dots$$

Cherchons les points pour lesquels cette différence est un infiniment petit du septième ordre. Il faut qu'on ait

$$165B^2 + 24CA - 19A^2 = 0.$$

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation de la conique rapportée à son centre et à ses axes, on a

$$B^2 - AC = \frac{-1}{a^2 b^2}, \quad A + C = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

et la relation précédente devient

$$205A^2 - 186 \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} A + \frac{165}{a^2 b^2} = 0.$$

Les points cherchés sont à l'intersection de la conique avec le diamètre conjugué de l'axe nouveau des x ; φ^2 étant le carré de leur distance au centre, on a par le théorème d'Apollonius

$$\frac{1}{\lambda} - \varphi^2 = a^2 + b^2;$$

d'où, pour l'équation en φ^2 ,

$$165\varphi^4 - 144(a^2 + b^2)\varphi^2 + 205a^2b^2 - 21(a^2 + b^2)^2 = 0.$$

Pour une ellipse $a^2 > b^2 > 0$, les valeurs de φ^2 comprises entre a^2 et b^2 seules donneront des points réels. Pour $\varphi^2 = b^2$, le premier membre de l'équation prend la valeur $(19b^2 - 21a^2)a^2$, quantité négative; pour $\varphi^2 = a^2$, $(19a^2 - 21b^2)b^2$; il faut qu'elle soit positive pour qu'il y ait une racine comprise entre b^2 et a^2 .

Pour l'hyperbole $a^2 > 0$, $b^2 = -b'^2$, b' étant réel, les racines de l'équation en φ^2 sont de signes contraires; et la racine positive est supérieure à a^2 , puisque pour $\varphi^2 = a^2$, le premier membre de l'équation devient $-(19a^2 + 21b'^2)b'^2$, quantité négative.

Pour la parabole

$$(x \sin \varphi + y \cos \varphi)^2 = 2p(x \cos \varphi - y \sin \varphi),$$

on a $B^2 = AC$; la relation devient

$$186C - 19A = 0.$$

ou, par rapport à l'angle φ ,

$$186 \cos^2 \varphi - 19 \sin^2 \varphi = 0.$$

On a donc toujours deux points pour lesquels la différence d est un infiniment petit du septième ordre.

3. Soit

$$z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2} + z_3 + \dots$$

l'équation d'une surface en un point ordinaire. L'élément dS de cette surface a pour valeur $dx dy$ multiplié par

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = 1 + \frac{x^2}{2R_1^2} + \frac{y^2}{2R_2^2} + \left(\frac{R_1}{x z_{3x}} + \frac{R_2}{y z_{3y}} \right) + \dots$$

Prenons sur la normale, à cette surface, un point situé à une distance R de l'origine et joignons-le au point x, y de la surface; la ligne obtenue perce le plan tangent au point dont les coordonnées sont

$$X = \frac{Rx}{R - z}, \quad Y = \frac{Ry}{R - z}.$$

La projection conique de l'élément de la surface aura pour va-

leur

$$d\tau = \left| \begin{array}{cc} X'_x & X'_y \\ Y'_x & Y'_y \end{array} \right| dx dy = \frac{\mathfrak{R} + \mathfrak{z}_1 + 2\mathfrak{z}_3 + \dots + (i-1)\mathfrak{z}_i + \dots}{\mathfrak{R} \left(1 - \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{R}}\right)^3}$$

ou

$$d\tau = 1 + \frac{4\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{z}\mathfrak{R}} + \frac{5\mathfrak{z}_3}{\mathfrak{R}} + \dots$$

La différence $dS - d\tau$ est égale à $D dx dy$,

$$D = \frac{x^2}{2R_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{4}{\mathfrak{R}} \right) + \frac{y^2}{2R_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{4}{\mathfrak{R}} \right) + \frac{x\mathfrak{z}'_{3x}}{R_1} + \frac{y\mathfrak{z}'_{3y}}{R_2} - \frac{5\mathfrak{z}_3}{\mathfrak{R}} + \dots$$

Pour un ombilic $R_1 = R_2$, et si l'on fait $\mathfrak{R} = 4 R_1$, il vient

$$D = \frac{7}{4} \frac{\mathfrak{z}_3}{R_1} + \dots$$

à cause de la relation

$$x\mathfrak{z}'_{3x} + y\mathfrak{z}'_{3y} = 3\mathfrak{z}_3.$$

Pour un point parabolique $\frac{1}{R_2} = 0$, et si l'on fait $\mathfrak{R} = 4 R_1$, il vient

$$D = \frac{4x\mathfrak{z}'_{3x} - 5\mathfrak{z}_3}{4 R_1} + \dots$$

Dans l'intégrale double $\iint D dx dy$ étendue à tous les points de l'aire située dans une courbe fermée symétrique par rapport à l'origine, un cercle, par exemple, de rayon r , les termes de degré impair de D disparaissent, et, dans le cas où l'origine est un ombilic ou un point parabolique, cette intégrale ou la différence $S - \tau$ est un infiniment petit du sixième ordre par rapport à r .

Détermination directe de l'intégrale

$$f(\cos mx)^p (\cos m'x)^{p'} \dots (\sin nx)^q (\sin n'x)^{q'} \dots dx:$$

par M. C.-A. LAISANT.

Au dernier Congrès (1889) de l'Association française pour l'avancement des Sciences, j'ai communiqué une Note dans laquelle se trouve directement déterminée l'intégrale

$$\int \cos p x \sin q x dx.$$

sans avoir recours à l'abaissement successif des degrés p et q .

Il est possible de généraliser beaucoup plus la méthode indiquée, et de l'appliquer à la détermination de l'intégrale

$$f(\cos mx)^p (\cos m'x)^{p'} \dots (\sin nx)^q (\sin n'x)^{q'} \dots dx,$$

les nombres $m, m', \dots, p, p', \dots, n, n', \dots, q, q', \dots$ étant supposés entiers et positifs.

Soient

$$mp + m'p' + \dots + nq + n'q' + \dots = M,$$

$$p + p' + \dots + q + q' + \dots = P,$$

$$q + q' + \dots = Q.$$

Posons $\varepsilon^{2x} = z$. En remplaçant les cosinus et les sinus par leurs valeurs sous forme exponentielle, en vertu des formules connues $\cos u = \frac{\varepsilon^u + \varepsilon^{-u}}{2}$, $\sin u = \frac{\varepsilon^u - \varepsilon^{-u}}{2i}$, on aura, pour la fonction $F(x)$ qui figure sous le signe f ,

$$\frac{1}{2^P i^Q \varepsilon^{Mx}} (z^m + 1)^p (z^{m'} + 1)^{p'} \dots (z^n - 1)^q (z^{n'} - 1)^{q'} \dots$$

Soit

$$(\zeta) \quad \left\{ \begin{array}{l} (z^m + 1)^p (z^{m'} + 1)^{p'} \dots (z^n - 1)^q (z^{n'} - 1)^{q'} \dots \\ = A_0 z^M + A_1 z^{M-1} + \dots + A_{M-1} z + A_M. \end{array} \right.$$

Les coefficients $A_0, A_1, \dots, A_M$ de ce développement fini seront par conséquent déterminés uniquement par des multiplications algébriques.

Si Q est pair, il est très aisé de reconnaître qu'on a $A_0 = A_M$, $A_1 = A_{M-1}, \dots$.

Si Q est impair, on a $A_0 = -A_M$, $A_1 = -A_{M-1}, \dots$.

Si M est pair, il y aura, dans le développement, un terme central ; mais le coefficient $A_{\frac{M}{2}}$ de ce terme s'annule pour Q impair, puisqu'il faut qu'on ait $A_{\frac{M}{2}} = -A_{\frac{M}{2}}$.

Si M est impair, il n'y aura pas de terme central.

Cela posé, nous considérerons les quatre cas suivants :

1. Q pair, M pair ;
2. Q pair, M impair ;

3. Q impair, M pair ;

4. Q impair, M impair.

Et nous aurons, respectivement, en rétablissant maintenant ε^{2x} à la place de z ,

$$\begin{aligned} 1. \quad F(x) &= \frac{1}{2^p (-1)^{\frac{Q}{2}} \varepsilon^{Mx}} \{ A_0 (\varepsilon^{2Mx} + 1) + A_1 [\varepsilon^{(2M-2)x} + \varepsilon^{2x}] + \dots + A_{\frac{M}{2}} \varepsilon^{Mx} \} \\ &= \frac{1}{2^{p-1} (-1)^{\frac{Q}{2}}} \left[A_0 \cos Mx + A_1 \cos (M-2)x + \dots \right. \\ &\quad \left. + A_{\frac{M}{2}-1} \cos 2x + A_{\frac{M}{2}} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad F(x) &= \frac{1}{2^p (-1)^{\frac{Q}{2}} \varepsilon^{Mx}} \{ A_0 (\varepsilon^{2Mx} + 1) + A_1 [\varepsilon^{(2M-2)x} + \varepsilon^{2x}] + \dots \\ &\quad + A_{\frac{M-1}{2}} [\varepsilon^{(M+1)x} + \varepsilon^{(M-1)x}] \} \\ &= \frac{1}{2^{p-1} (-1)^{\frac{Q}{2}}} \left[A_0 \cos Mx + A_1 \cos (M-2)x + \dots \right. \\ &\quad \left. + A_{\frac{M-3}{2}} \cos 3x + A_{\frac{M-1}{2}} \cos x \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad F(x) &= \frac{1}{2^p i^Q \varepsilon^{Mx}} \{ A_0 (\varepsilon^{2Mx} - 1) + A_1 [\varepsilon^{(2M-2)x} - \varepsilon^{2x}] + \dots \\ &\quad + A_{\frac{M}{2}-1} [\varepsilon^{(M+2)x} - \varepsilon^{(M-2)x}] \} \\ &= \frac{1}{2^{p-1} (-1)^{\frac{Q-1}{2}}} \left[A_0 \sin Mx + A_1 \sin (M-2)x + \dots \right. \\ &\quad \left. + A_{\frac{M}{2}-1} \sin 2x \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad F(x) &= \frac{1}{2^p i^Q \varepsilon^{Mx}} \{ A_0 (\varepsilon^{2Mx} - 1) + A_1 [\varepsilon^{(2M-2)x} - \varepsilon^{2x}] + \dots \\ &\quad + A_{\frac{M-1}{2}} [\varepsilon^{(M+1)x} - \varepsilon^{(M-1)x}] \} \\ &= \frac{1}{2^{p-1} (-1)^{\frac{Q-1}{2}}} \left[A_0 \sin Mx + A_1 \sin (M-2)x + \dots \right. \\ &\quad \left. + A_{\frac{M-3}{2}} \sin 3x + A_{\frac{M-1}{2}} \sin x \right]. \end{aligned}$$

L'intégration $I = \int F(x) dx$ peut donc se faire immédiatement, grâce à cette décomposition, et nous donne, dans les quatre cas

considérés,

$$I_1 = \frac{1}{2^{p-1}(-1)^{\frac{p}{2}}} \left[\frac{\Lambda_0}{M} \sin Mx + \frac{\Lambda_1}{M-2} \sin(M-2)x + \dots \right. \\ \left. + \frac{\Lambda_{\frac{M-1}{2}}}{2} \sin 2x + \Lambda_{\frac{M}{2}} x \right] + c,$$

$$I_2 = \frac{1}{2^{p-1}(-1)^{\frac{p}{2}}} \left[\frac{\Lambda_0}{M} \sin Mx + \frac{\Lambda_1}{M-2} \sin(M-2)x + \dots \right. \\ \left. + \frac{\Lambda_{\frac{M-3}{2}}}{3} \sin 3x + \frac{\Lambda_{\frac{M-1}{2}}}{2} \sin x \right] + c,$$

$$I_3 = \frac{1}{2^{p-1}(-1)^{\frac{p+1}{2}}} \left[\frac{\Lambda_0}{M} \cos Mx + \frac{\Lambda_1}{M-2} \cos(M-2)x + \dots \right. \\ \left. + \frac{\Lambda_{\frac{M-1}{2}}}{2} \cos 2x \right] + c,$$

$$I_4 = \frac{1}{2^{p-1}(-1)^{\frac{p+1}{2}}} \left[\frac{\Lambda_0}{M} \cos Mx + \frac{\Lambda_1}{M-2} \cos(M-2)x + \dots \right. \\ \left. + \frac{\Lambda_{\frac{M-3}{2}}}{3} \cos 3x + \frac{\Lambda_{\frac{M-1}{2}}}{2} \cos x \right] + c.$$

Au moyen de ces formules, on peut donc écrire immédiatement l'intégrale, après avoir préalablement effectué le développement (ζ) ci-dessus, qui donne les coefficients $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots$

On aurait très aisément, par les transformations habituelles, des formules analogues répondant aux fonctions hyperboliques Ch et Sh.

Sur les fonctions sphériques; par M. F. CASPARY.

Dans une lettre que M. Hermite a bien voulu m'adresser, l'illustre géomètre, en généralisant la formule élégante de M. Bel-

trami

$$(x^2 - 1) \frac{dP_n}{dx} = \frac{n(n+1)}{2n+1} (P_{n+1} - P_{n-1}),$$

a établi la relation importante

$$(x^2 - 1)^y \frac{d^y P_n}{dx^y} = A P_{n+y} + A_1 P_{n+y-1} + \dots + A_y P_{n-y},$$

et a exprimé, au moyen d'une formule de Jacobi, les coefficients $A, A_1, \dots, A_y$ sous la forme d'intégrales définies ⁽¹⁾.

Je me propose, dans cette Note, de généraliser les formules de Jacobi, de M. Beltrami et de M. Hermite, de déduire les valeurs numériques des coefficients $A, A_1, \dots, A_y$ et d'établir, d'une façon tout à fait élémentaire, quelques autres formules qui me paraissent non sans intérêt pour la théorie des fonctions sphériques.

1. Les fonctions sphériques de première espèce, que je désigne par $P_r(x)$ ou plus simplement encore par P_r , sont les coefficients de x^r ($r = 1, 2, \dots$) dans la série

$$(I) \quad T = (1 - 2xz + x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + xP_1 + x^2P_2 + \dots + x^nP_n + \dots$$

On tire de cette définition, en différentiant par rapport à z et à x ⁽²⁾,

$$(II) \quad \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial z} = (x - z)T,$$

$$(III) \quad \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x} = zT,$$

ou

$$(1 - 2xz + x^2) \frac{\partial T}{\partial z} = (x - z)T,$$

$$(1 - 2xz + x^2) \frac{\partial T}{\partial x} = zT.$$

En égalant dans les deux membres de la première formule les coefficients de x^n et, dans les deux membres de la deuxième formule, les coefficients de x^{n+1} , on obtient

$$(1) \quad (n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0,$$

$$(2) \quad P'_{n+1} - 2xP'_n + P'_{n-1} = P_n,$$

⁽¹⁾ Voir HERMITE, *Sur les polynômes de Legendre* (*Journal de M. Kronecker*), t. CVII, p. 80.

⁽²⁾ Voir *Journal de M. Kronecker*, t. CVII, p. 137.

où

$$P'_x = \frac{dP_x}{dx}.$$

Si l'on différentie la formule (1) par rapport à x , et si l'on élimine successivement P'_n , P'_{n-1} , P'_{n+1} , on trouve

$$(3) \quad P'_{n+1} = P'_{n-1} = (2n+1)P_n,$$

$$(4) \quad P'_{n+1} - xP'_n = (n+1)P_n,$$

$$(5) \quad xP'_n - P'_{n-1} = nP_n;$$

et en différentiant ces formules $(\nu-1)$ fois par rapport à x , on a

$$(6) \quad P^{(\nu)}_{n+1} = P^{(\nu)}_{n-1} = (2n+1)P^{(\nu)}_n,$$

$$(7) \quad P^{(\nu)}_{n+1} - xP^{(\nu)}_n = (n+\nu)P^{(\nu-1)}_n,$$

$$(8) \quad xP^{(\nu)}_n - P^{(\nu)}_{n-1} = (n-\nu+1)P^{(\nu-1)}_n,$$

où

$$P^{(\nu)}_n = \frac{d^\nu P_n}{dx^\nu} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n).$$

Les formules (7) et (8) fournissent encore les relations

$$(9) \quad (n-\nu+1)P^{(\nu)}_{n+1} - (2n+1)xP^{(\nu)}_n + (n+\nu)P^{(\nu)}_{n-1} = 0,$$

$$(10) \quad P^{(\nu)}_{n+1} - 2xP^{(\nu)}_n + P^{(\nu)}_{n-1} = (2\nu-1)P^{(\nu-1)}_n,$$

dont la dernière découle aussi de la formule

$$\frac{1}{T^2} \frac{\partial^\nu T}{\partial x^\nu} = (2\nu-1)x \frac{\partial^{\nu-1} T}{\partial x^{\nu-1}},$$

qui est elle-même la conséquence immédiate de la relation

$$(IV) \quad \frac{\partial^\nu T}{\partial x^\nu} = 1.3.5.7 \dots (2\nu-1)x^\nu T^{2\nu+1},$$

2. D'après la formule (II), on a

$$(x-x) \frac{\partial T}{\partial x} = (x-x)^2 T^3;$$

et comme on a aussi identiquement

$$(x-x)^2 = x^2 - 1 + (1 - 2xx + x^2) = (x^2 - 1) + \frac{1}{T^2},$$

on obtient

$$(x-x) \frac{\partial T}{\partial x} = (x^2 - 1) T^3 + T,$$

ou, d'après la formule (III),

$$(x^2-1) \frac{\partial T}{\partial x} = x(x-z) \frac{\partial T}{\partial z} - zT.$$

En égalant, dans les deux membres de cette formule, les coefficients de z^n , on trouve

$$(11) \quad (x^2-1)P'_n = n(xP_n - P_{n-1})$$

et, à cause de la formule (1), on en déduit aussi les relations

$$(12) \quad (x^2-1)P'_n = (n+1)(P_{n+1} - xP_n),$$

$$(13) \quad (x^2-1)P'_n = \frac{n(n+1)}{2n+1}(P_{n+1} - P_{n-1}),$$

dont la dernière est celle de M. Beltrami.

Si l'on différencie cette formule, on'en tire, au moyen de la formule (3), l'équation différentielle bien connue

$$(14) \quad \frac{d(x^2-1)P'_n}{dx} = n(n+1)P_n,$$

à laquelle on peut aussi donner la forme

$$(x^2-1)P''_n + 2xP'_n = n(n+1)P_n.$$

Par différentiation, on en tire immédiatement

$$(x^2-1)P''^{(\mu+2)}_n + 2(\mu+1)xP'^{(\mu+1)}_n = [n(n+1) - \mu(\mu+1)]P^{(\mu)}_n,$$

et en multipliant par $(x^2-1)^\mu$, on a

$$(x^2-1)^{\mu+1}P''^{(\mu+2)}_n + 2(\mu+1)x(x^2-1)^\mu P'^{(\mu+1)}_n = (n-\mu)(n+\mu+1)(x^2-1)^\mu P^{(\mu)}_n$$

ou

$$(15) \quad \frac{d(x^2-1)^{\mu+1}P'^{(\mu+1)}_n}{dx} = (n-\mu)(n+\mu+1)(x^2-1)^\mu P^{(\mu)}_n$$

et, par conséquent, plus généralement.

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^{\lambda+1}(x^2-1)^{\mu+1}P^{(\mu+1)}_n}{dx^{\lambda+1}} \\ &= (n-\mu) \dots (n-\mu+\lambda)(n+\mu-\lambda+1) \dots (n+\mu+1)(x^2-1)^{\mu-\lambda} P^{(\mu-\lambda)}_n, \\ & \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots, \mu), \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \right.$$

La formule (16) donne naissance à beaucoup de relations dont je vais établir quelques-unes, savoir la généralisation de l'équation

différentielle (14), la généralisation de la formule de M. Beltrami et les deux formules importantes que l'on doit à Rodrigues et à Jacobi.

En effet, si l'on pose dans la formule (16) $\lambda + 1 = \mu + 1 = \nu$, on en tire

$$(17) \quad \frac{d^{\nu}(x^2-1)^{\nu} P_n^{(\nu)}}{dx^{\nu}} = (n-\nu+1)(n-\nu+2) \dots (n+\nu) P_n,$$

formule qui représente la généralisation de l'équation différentielle (14).

De plus, si l'on pose $\lambda + 1 = \nu - 1$, $\mu + 1 = \nu$, la formule (16) prend la forme

$$\frac{d^{\nu-1}(x^2-1)^{\nu} P_n^{(\nu)}}{dx^{\nu-1}} = (n-\nu+1) \dots (n-1)(n+2) \dots (n+\nu)(x^2-1) P'_n,$$

et, d'après la formule de M. Beltrami, on obtient la généralisation suivante de cette relation

$$(18) \quad \frac{d^{\nu-1}(x^2-1)^{\nu} P_n^{(\nu)}}{dx^{\nu-1}} = \frac{(n-\nu+1) \dots (n+\nu)}{2n+1} (P_{n+1} - P_{n-1}).$$

Pour déduire de la formule (17) l'expression connue de P_n , due à Rodrigues et à Jacobi, j'y pose $\nu = n$. Alors on a

$$\frac{d^n(x^2-1)^n P_n^{(n)}}{dx^n} = 1.2.3 \dots 2n. P_n.$$

Or on déduit de l'expression (IV)

$$P_n^{(n)} = 1.3.5 \dots (2n-1);$$

donc la dernière formule devient

$$1.2.3 \dots 2n. P_n = 1.3.5 \dots (2n-1) \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

ou

$$(19) \quad P_n = \frac{1}{2^n.1.2.3 \dots n} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Au moyen des valeurs de $P_n^{(n)}$ et P_n , que je viens d'établir, la formule (16) fournit enfin, pour $\mu = n-1$, $\lambda = n-\nu-1$ ($\nu < n$):

$$\frac{d^{n-\nu}(x^2-1)^n P_n^{(n)}}{dx^{n-\nu}} = 1.2.3 \dots (n-\nu)(n+\nu+1) \dots 2n(x^2-1)^{\nu} P_n^{\nu}$$

ou encore

$$1.3.5\dots(2n-1) \frac{d^{n-\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n-\nu}} = \frac{1.2.\dots.2n}{(n-\nu+1)\dots(n+\nu)} (x^2-1)^\nu P_n^{(\nu)}$$

ou enfin

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^{n-\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n-\nu}} &= 2^n.1.2.3\dots n (x^2-1)^\nu P_n^{(\nu)}, \\ &= \frac{(x^2-1)^\nu}{(n-\nu+1)\dots(n+\nu)} \frac{d^{n+\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n+\nu}}. \end{aligned} \right.$$

formule qui est due à Jacobi.

3. En différentiant la formule de M. Beltrami ($\nu-1$) fois par rapport à x , et ayant égard à la formule (9), on obtient

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} (2n+1)(x^2-1)P_n^{(\nu)} \\ = (n-\nu+1)(n-\nu+2)P_{n+1}^{(\nu-1)} - (n+\nu-1)(n+\nu)P_{n-1}^{(\nu-1)}. \end{aligned} \right.$$

Par conséquent, on a, après quelques calculs simples,

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} &(x^2-1)^2 P_n^{(\nu)} \\ &= + \frac{(n-\nu+1)(n-\nu+2)(n-\nu+3)(n-\nu+4)}{(2n+1)(2n+3)} P_{n+2}^{(\nu-2)} \\ &- 2 \frac{(n-\nu+1)(n-\nu+2)(n+\nu-1)(n+\nu)}{(2n-1)(2n+3)} P_{n-2}^{(\nu-2)} \\ &+ \frac{(n+\nu-3)(n+\nu-2)(n+\nu-1)(n+\nu)}{(2n-1)(2n+1)} P_{n-2}^{(\nu-2)}, \end{aligned} \right.$$

formule qui se transforme pour $\nu=2$ en celle qui finit la Note de M. Hermite (*loc. cit.*, p. 83).

En multipliant la formule (22) par (x^2-1) , on en déduit, au moyen de la formule (21), la suivante

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} &(x^2-1)^3 P_n^{(\nu)} \\ &= + \frac{(n-\nu+1)(n-\nu+2)(n-\nu+3)(n-\nu+4)(n-\nu+5)(n-\nu+6)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} P_{n+3}^{(\nu-3)} \\ &- 3 \frac{(n-\nu+1)(n-\nu+2)(n-\nu+3)(n-\nu+4)}{(2n+1)(2n+5)} \frac{(n+\nu-1)(n+\nu)}{2n-1} P_{n+1}^{(\nu-3)} \\ &+ 3 \frac{(n-\nu+1)(n-\nu+2)}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(n+\nu-3)(n+\nu-2)(n+\nu-1)(n+\nu)}{2n-3} P_{n-1}^{(\nu-3)} \\ &- \frac{(n+\nu-5)(n+\nu-4)(n+\nu-3)(n+\nu-2)(n+\nu-1)(n+\nu)}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} P_{n-3}^{(\nu-3)}. \end{aligned} \right.$$

D'une façon analogue, en multipliant la formule (23) par (x^2-1) ,

on obtient, au moyen de la formule (21), la valeur de $(x^2 - 1)^4 P_n^{(\nu)}$; et en calculant ainsi, de proche en proche, $(x^2 - 1)^5 P_n^{(\nu)}$, $(x^2 - 1)^6 P_n^{(\nu)}$, on est conduit enfin à la formule générale

$$(24) \quad \begin{cases} (x^2 - 1)^\lambda P_n^{(\nu)} = \sum_z (-1)^z \lambda_z A_{n,\nu}^{\lambda,z} P_{n+\lambda-2z}^{(\nu-\lambda)} \\ (\lambda = 0, 1, 2, \dots, \nu; \quad \lambda = 1, 2, \dots, \nu) \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1, \\ \lambda_1 &= \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2}, \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_z &= \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-z+1)}{1 \cdot 2 \dots z}, \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_\lambda &= 1; \end{aligned}$$

et où

$$\begin{aligned} A_{n,\nu}^{\lambda,0} &= \frac{(n-\nu+1)(n-\nu+2)\dots(n-\nu+2\lambda)}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2\lambda-1)}, \\ A_{n,\nu}^{\lambda,1} &= [2(n+\lambda)-3] \frac{(n-\nu+1)\dots(n-\nu+2\lambda-2)}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2\lambda-1)} \frac{(n+\nu-1)(n+\nu)}{2n-1}, \\ &\dots\dots\dots, \\ A_{n,\nu}^{\lambda,z} &= [2(n+\lambda-2z)+1] \frac{(n-\nu+1)\dots(n-\nu+2\lambda-2z)}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2\lambda-2z+1)} \\ &\quad \times \frac{(n+\nu-2z+1)\dots(n+\nu)}{(2n-2z+1)\dots(2n-1)}, \\ &\dots\dots\dots, \\ A_{n,\nu}^{\lambda,\lambda} &= \frac{(n+\nu-2\lambda+1)(n+\nu-2\lambda+2)\dots(n+\nu)}{(2n+1)(2n-2\lambda+3)(2n-2\lambda+5)\dots(2n-1)}. \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $\lambda = \nu$, les numérateurs des coefficients $A_{n,\nu}^{\lambda,0}$, $A_{n,\nu}^{\lambda,1}$, $\dots$, $A_{n,\nu}^{\lambda,\lambda}$ deviennent égaux entre eux et obtiennent la valeur commune

$$N = (n-\nu+1)(n-\nu+2)\dots(n+\nu);$$

par conséquent, on tire de la formule (24) la relation due à M. Hermite

$$(25) \quad (x^2 - 1)^\nu P_n^{(\nu)} = \sum_z (-1)^z \nu_z A_z P_{n+\nu-2z} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, \nu),$$

et l'on trouve pour les coefficients Λ_z les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \frac{N}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2v-1)}, \\ \Lambda_1 &= \frac{N(2n+2v-3)}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2v-1)} \frac{1}{(2n-1)}, \\ &\dots\dots\dots \\ \Lambda_z &= \frac{N(2n+2v-4z+1)}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2v-2z+1)} \frac{1}{(2n-2z+1)\dots(2n-1)}, \\ &\dots\dots\dots \\ \Lambda_v &= \frac{N}{(2n+1)} \frac{1}{(2n-2v+3)(2n-2v+5)\dots(2n-1)}. \end{aligned}$$

4. Les fonctions sphériques de seconde espèce $Q_s(y)$ sont définies, d'après M. F. Neumann, par l'intégrale

$$Q_s(y) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_s(x)dx}{y-x} \quad (s = 0, 1, 2, \dots).$$

Au moyen de cette expression et en ayant égard aux formules (1), (13), (3), (12), on reconnaît aisément ⁽¹⁾ que les relations (1), (3), (12) ne changent pas; si l'on y remplace $P_n(x)$ par $Q_n(y)$. Or les relations (1), (3), (12) entraînent les autres; par conséquent : *Toutes les formules établies dans cette Note subsistent encore si l'on remplace les fonctions sphériques de première espèce $P_n(x)$ par les fonctions sphériques de seconde espèce $Q_n(y)$.*

Tétraèdre arithmétique; par M. C.-A. LAISANT.

1. Le triangle arithmétique de Pascal peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ \dots\dots\dots & & & & & & \end{array}$$

(1) Voir ma Note citée, p. 139.

ou, sous une forme plus figurative peut-être,



en employant une série de cercles égaux tangents entre eux, savoir, un dans une première ligne horizontale, deux dans la deuxième, et ainsi de suite : le coefficient qu'on inscrit dans chaque cercle s'obtient en ajoutant ceux des deux cercles tangents de la ligne supérieure. Lorsqu'il n'y en a qu'un, ce qui arrive pour les termes extrêmes de chaque ligne, on le reproduit purement et simplement. En partant du coefficient 1 au sommet, la $(n + 1)^{\text{ième}}$ ligne donne les coefficients du développement $(x + y)^n$, lesquels sont symétriquement disposés par rapport au milieu de la ligne.

2. Reprenons la figure précédente, formée jusqu'à la $(n + 1)^{\text{ième}}$ ligne, et écrivons en regard, sur une colonne verticale, les $n + 1$ coefficients $1 = c_0, c_1, \dots, c_n = 1$ de $(x + y)^n$:

$$\begin{array}{ccccccc} c_0 & \dots & \dots & \dots & 1 & & \\ c_1 & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 & \\ c_2 & \dots & \dots & \dots & 1 & 2 & 1 \\ & \dots & \dots & \dots & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & & \\ c_n & \dots & c_0 & c_1 & \dots & c_n & \end{array}$$

Si nous multiplions les termes de chaque ligne par le coefficient placé en regard de cette ligne, nous obtiendrons les coefficients du développement d'un trinôme $(x + y + z)^n$ élevé à la $n^{\text{ième}}$ puissance. En effet, prenons, par exemple, la $(p + 1)^{\text{ième}}$ ligne, contenant les coefficients de $(x + y)^p$; le terme qui dans cette ligne occupe le rang $q + 1$ est $\frac{p!}{q!(p-q)!}$; le coefficient c^p placé en regard est $\frac{n!}{p!(n-p)!}$. Le produit sera donc

$$\frac{n!}{(n-p)!q!(p-q)!},$$

c'est-à-dire précisément le coefficient du terme en $x^{n-p} y^q z^{p-q}$ dans le développement de $(x + y + z)^n$.

Supposons que chacune d'elles représente une couche de sphères ou de boulets sphériques; puis plaçons ces couches les unes au-dessus des autres, en commençant par la plus grande comme base. Nous aurons ainsi une figure représentant une pile de boulets triangulaire. Chaque boulet est affecté d'un coefficient, qui s'obtient comme il suit : le coefficient du boulet placé au sommet est égal à 1, et le coefficient d'un boulet quelconque est égal à la somme des coefficients des boulets de la couche supérieure, qui sont en contact avec lui ⁽¹⁾.

C'est à cette figure que nous proposons de donner le nom de *tétraèdre arithmétique*. On voit toute l'analogie de formation qu'elle présente avec le triangle arithmétique de Pascal. Ce dernier donne toujours à sa base les coefficients de $(x + y)^n$ écrits en ligne droite; le tétraèdre donne à sa base les coefficients de $(x + y + z)^n$ écrits en triangle.

4. La base du tétraèdre arithmétique (n° 2) présente plusieurs propriétés presque évidentes :

1° Le nombre de ses éléments est $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$;

2° La somme de ses éléments est 3^n ; car $(1 + 1 + 1)^n = 3^n$;

3° Si l'on affecte du signe + toutes les lignes de rangs impairs, à partir de l'un des côtés, et du signe — toutes les lignes de rangs pairs, la somme algébrique des éléments est égale à l'unité; on a, en effet, $(-x + y + z)^n$ en faisant $x = y = z = 1$;

4° Si, ayant fait l'opération que nous venons de dire, on multiplie les éléments de la deuxième ligne par 2, ceux de la troisième par 2^2 , ceux de la quatrième par 2^3 , et ainsi de suite, la somme algébrique des éléments ainsi obtenus est égale à zéro; on a, en effet, $(-2 + 1 + 1)^n$.

Nous pouvons chercher aussi le produit de tous les éléments,

(1) Cette propriété résulte de l'identité

$$\frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} = \frac{(k+l+m-1)!}{k!l!(m-1)!} + \frac{(k+l+m-1)!}{k!(l-1)!m!} + \frac{(k+l+m-1)!}{(k-1)!l!m!},$$

dont la vérification est très facile.

c'est-à-dire le produit des coefficients du développement de $(x + y + z)^n$. Pour cela, prenons la formation indiquée au commencement du n° 2. Si nous appelons P_k le produit des coefficients de $(x + y)^k$, c'est-à-dire de la $k + 1^{\text{ième}}$ ligne, il est évident que le produit des éléments composant cette ligne sera $c_k^{k+1} P_k$. Nous aurons donc pour le produit cherché $\mathfrak{Q}_n$.

$$\mathfrak{Q}_n = c_0 c_1^2 c_2^3 \dots c_n^{n+1} P_1 P_2 \dots P_n.$$

Remplaçant chaque coefficient c_k par $\frac{m!}{k!(m-k)!}$ et chaque produit P_k par l'expression $\frac{(k!)^{k-1}}{[1!2!3! \dots (k-1)!]^2}$, d'après une formule que nous avons précédemment établie ⁽¹⁾, on trouve la nouvelle expression

$$\frac{(n!)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}{[1!n!2!n-1!3!n-2! \dots (n-1)!2n!]^3}.$$

Il est possible, enfin, de simplifier encore ce résultat en appelant

$$t_1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3, \quad t_3 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6, \quad \dots, \quad t_p = \frac{p(p+1)}{2}, \quad \dots$$

les nombres triangulaires successifs.

On a alors

$$\mathfrak{Q}_n = n^{t_{n+1}-3t_1} (n-1)^{t_{n+1}-3t_2} \dots 2^{t_{n+1}-3t_{n-1}} 1^{t_{n+1}-3t_n}.$$

Par exemple, si $n = 3$, les nombres triangulaires étant

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \dots,$$

les exposants prendront les valeurs $10 - 3 = 7$, $10 - 9 = 1$, $10 - 18 = -8$, et

$$\mathfrak{Q}_3 = 3^7 \cdot 2.$$

Pour $n = 4$, les exposants sont $15 - 3 = 12$, $15 - 9 = 6$, $15 - 18 = -3$, et

$$\mathfrak{Q}_4 = 4^{12} \cdot 3^6 \cdot 2^{-3}.$$

Pour $n = 5$, les exposants sont $21 - 3 = 18$, $21 - 9 = 12$,

⁽¹⁾ *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XVIII, p. 140.

$21 - 18 = 3$, $21 - 30 = -9$, et

$$\mathfrak{Q}_5 = 5^{18} . 4^{12} . 3^3 . 2^{-9} .$$

Le rapport de deux produits consécutifs $\mathfrak{Q}_{n+1}$ et $\mathfrak{Q}_n$ est

$$\frac{\mathfrak{Q}_{n+1}}{\mathfrak{Q}_n} = (n+1)^{\frac{n(n+5)}{2}} . n^{n-4} . (n-1)^{n-7} . (n-2)^{n-10} \dots 2^{-2n+2} .$$

Par exemple,

$$\frac{\mathfrak{Q}_5}{\mathfrak{Q}_4} = 5^{\frac{4.9}{2}} . 4^{4-4} 3^{3-7} . 2^{2-10} = 5^{18} . 4^0 . 3^{-3} . 2^{-6} .$$

5. Concevons que nous ayons formé le tétraèdre arithmétique d'ordre n , défini comme nous l'avons dit au n° 3, et posé sur une base horizontale. Si nous plaçons les coefficients $c_0, c_1, \dots, c_n$ de $(x+y)^n$ sur une ligne verticale, chacun d'eux répondant à une couche horizontale, et si nous formons les produits de tous les éléments d'une couche quelconque par le coefficient correspondant, nous obtiendrons un nouveau tétraèdre, dont les éléments numériques offriront une entière symétrie par rapport aux quatre faces. Ces éléments seront les coefficients du développement de $(x+y+z+t)^n$.

Il serait facile d'établir diverses propriétés de cette figure, par analogie avec celles du n° 4. Nous nous contenterons, comme résumé de ce qui précède, de faire remarquer que :

Les coefficients du développement de $(x+y)^n$ se disposent symétriquement suivant une ligne droite ;

Ceux du développement de $(x+y+z)^n$ suivant un triangle arithmétique ;

Ceux du développement de $(x+y+z+t)^n$ suivant un tétraèdre arithmétique.

Par analogie avec ce qui précède, on peut aisément déterminer aussi le produit des coefficients du développement de $(x+y+z+t)^n$, lequel a pour expression

$$c_0^1 c_1^2 c_2^3 \dots c_{n+1}^n . \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \dots \mathfrak{Q}_n .$$

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 5 NOVEMBRE 1890.

PRÉSIDENCE DE M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

Le diplôme et la médaille d'or obtenus par la Société à l'Exposition universelle de 1889 sont déposés sur le bureau.

Démissions : MM. Hermery, Pucciarelli et Rey adressent leurs démissions de membres de la Société.

Communications :

M. Fouret : *Sur les normales aux hyperboles équilatères.*

M. Laisant : *Sur une généralisation d'un théorème de Laguerre.*

M. Humbert : *Sur une surface remarquable du quatrième ordre.*

SÉANCE DU 19 NOVEMBRE 1890.

PRÉSIDENCE DE M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

Communications :

M. Vicaire : *Sur un mouvement pendulaire troublé.*

M. Fouret : *Sur un théorème relatif au centre de gravité des pieds des droites faisant avec une courbe algébrique un angle donné et menées par un point fixe.*

M. d'Ocagne : *Démonstration élémentaire du théorème de Malus sur les rayons réfléchis par une surface.*

SÉANCE DU 3 DÉCEMBRE 1890.

PRÉSIDENTE DE M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

Élections: M. Colot, présenté par MM. Javary et Maric; M. Genty, présenté par MM. Laisant et Haton de la Goupillière; M. Vaschy, présenté par MM. Sarrau et Poincaré, sont élus à l'unanimité.

Communications:

M. Fourret : *Sur le nombre des points brillants d'une surface éclairée par des rayons issus d'un point.*

M. Humbert : *Sur les normales à une quadrique et sur la surface lieu des centres de courbure.*

M. Humbert : *Sur la surface de Kummer.*

M. Laisant : *Sur deux problèmes relatifs au mouvement de deux points.*

SÉANCE DU 17 DÉCEMBRE 1890.

PRÉSIDENTE DE M. COLLIGNON.

M. le Ministre de l'Instruction publique annonce qu'une somme de mille francs est mise à la disposition de la Société pour la publication du *Répertoire bibliographique*.

Élections: M. Antomari, présenté par MM. André et Carvallo; M. Massieu, présenté par MM. Haton de la Goupillière et Vicaire, sont élus à l'unanimité.

Communications:

M. Humbert : *Sur une famille de quadriques faisant partie d'un système triple orthogonal.*

M. Lemoine : *Sur quelques formules de la géométrie du triangle.*

M. Kœnigs : *Sur certaines surfaces admettant pour lignes asymptotiques une série de cubiques gauches.*

M. d'Ocagne : *Sur une propriété des courbes algébriques.*

SÉANCE DU 7 JANVIER 1891.

PRÉSIDENTE DE M. COLLIGNON.

La Société procède au renouvellement de son Bureau.

Communications :

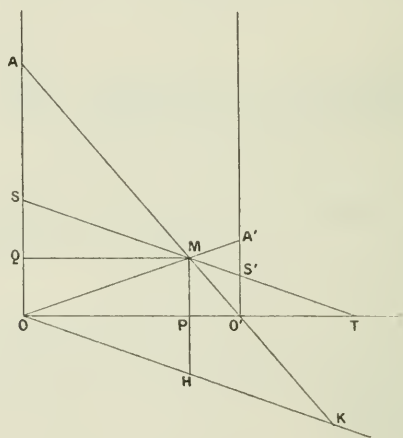
M. Vicaire : *Sur les oscillations troublées d'un système matériel autour d'une position d'équilibre.*

M. d'Ocagne fait la Communication suivante :

Sur la liaison entre les expressions du rayon de courbure en coordonnées ponctuelles et en coordonnées tangentielles.

Rappelons que si M est un point d'une courbe, ST la tangente

Fig. 1.



en ce point, les coordonnées rectangulaires (cartésiennes) du point M sont

$$OP = x, \quad OQ = y;$$

celles (plückériennes) de la tangente ST sont

$$-\frac{1}{OT} = r, \quad -\frac{1}{OS} = z.$$

Les coordonnées parallèles de la tangente ST sont

$$OS = u, \quad O'S' = v;$$

celles du point M sont

$$-\frac{1}{OA} = p, \quad -\frac{1}{OA'} = q.$$

Les formules qui, dans chaque système, lient les unes aux autres ces diverses coordonnées peuvent se résumer en une seule,

$$(1) \quad \omega = \frac{dx}{x d\beta - \beta dx},$$

complétée par le Tableau ci-dessous, qui fait connaître les valeurs correspondantes de ω , α et β :

Valeurs de ω	$x,$	$y,$	$r_1,$	$\zeta,$	$u,$	$v,$	$p,$	$q,$
» α	$\zeta,$	$r_1,$	$y,$	$x,$	$q,$	$p,$	$v,$	$u,$
» β	$r_1,$	$\zeta,$	$x,$	$y,$	$p,$	$q,$	$u,$	$v.$

Cela posé, on a

$$(2) \quad \frac{d\zeta}{dr_1} = \frac{d\zeta}{dx} \frac{dx}{dr_1}.$$

Mais, au moyen des diverses formes de (1), on trouve facilement

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dr_1} &= -\frac{x}{y}, \\ \frac{d\zeta}{dx} &= \frac{-x \frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(x \frac{dy}{dx} - y\right)^2} = -x \zeta^2 \frac{d^2 y}{dx^2}, \\ \frac{dx}{dr_1} &= \frac{\zeta \frac{d^2 \zeta}{dr_1^2}}{\left(\zeta - r_1 \frac{d\zeta}{dr_1}\right)^2} = \zeta y^2 \frac{d^2 \zeta}{dr_1^2}. \end{aligned}$$

Portant ces diverses expressions dans la formule (2), nous avons, toute réduction faite,

$$(3) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{d^2 \zeta}{dr_1^2} = \frac{1}{y^3 \zeta^3}$$

et de même

$$(3 \text{ bis}) \quad \frac{d^2 v}{du^2} \frac{d^2 q}{dp^2} = \frac{1}{v^3 q^3}.$$

Cette remarquable formule permet de passer de l'expression du rayon de courbure en coordonnées ponctuelles à son expression en coordonnées tangentielles et réciproquement.

Menons par le point O la parallèle OH à ST. L'expression du rayon de courbure en coordonnées cartésiennes peut s'écrire

$$(I) \quad R = \frac{1}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \frac{\overline{OH}^3}{\overline{OP}^3}.$$

Tirant de là $\frac{d^2 y}{dx^2}$ et portant dans (3), nous avons, après une transformation facile, pour le rayon de courbure en coordonnées pluckériennes,

$$(II) \quad R = \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \frac{\overline{MT}^3}{\overline{OT}^3},$$

formule que nous croyons nouvelle.

De même, en posant $OO' = \delta$, nous avons obtenu ailleurs l'expression suivante pour le rayon de courbure en coordonnées parallèles tangentielles

$$(III) \quad R = \frac{d^2 v}{du^2} \frac{\overline{SM}^3}{\delta}.$$

Dès lors, la formule (3 bis) donne, pour le rayon de courbure en coordonnées parallèles ponctuelles,

$$(IV) \quad R = \frac{1}{\frac{d^2 q}{dp^2}} \frac{\overline{AK}^3}{\delta},$$

formule également nouvelle dont nous avons communiqué une démonstration géométrique directe à l'Académie de Belgique.

En suivant un procédé de démonstration que nous avons récemment indiqué (*Nouv. Ann. de Math.*, p. 445; 1890), on obtient, soit au moyen de la formule (I), soit au moyen de (IV), le théorème de Reiss :

Si une droite quelconque coupe une courbe algébrique d'ordre n sous les angles $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ en des points où les rayons de courbure sont $R_1, R_2, \dots, R_m$, on a

$$\frac{1}{R_1 \sin^3 \alpha_1} + \frac{1}{R_2 \sin^3 \alpha_2} + \dots + \frac{1}{R_m \sin^3 \alpha_m} = 0.$$

De même, l'une ou l'autre des formules (II) ou (III) conduit

au théorème suivant que nous avons énoncé pour la première fois (*loc. cit.*, p. 148) :

Si les tangentes menées d'un point quelconque à une courbe algébrique de la classe n ont pour longueurs $t_1, t_2, \dots, t_n$, et si $R_1, R_2, \dots, R_n$ sont les rayons de courbure aux points de contact, on a

$$\frac{R_1}{t_1^4} + \frac{R_2}{t_2^3} + \dots + \frac{R_n}{t_n^3} = 0.$$

SÉANCE DU 21 JANVIER 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communication :

M. Humbert fait une Communication *sur les surfaces algébriques inscrites dans la surface de Kummer*. Il montre que cette surface admet 32 systèmes de surfaces cubiques inscrites et 31 systèmes de surfaces de quatrième degré inscrites.

SÉANCE DU 4 FÉVRIER 1891.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

M. LAISANT fait la Communication suivante :

Sur l'extension de la Géométrie cartésienne aux figures imaginaires.

Parmi les travaux ayant pour but d'étendre aux imaginaires les conceptions de la Géométrie analytique de Descartes, il convient de citer ceux de MM. Mouchot, entrepris depuis bien des années déjà, et Tarry, qui a publié plusieurs Mémoires sur ce sujet dans les comptes rendus de l'*Association française pour l'avancement des Sciences*. Laguerre et M. Marie, à un point de vue plus analytique, s'étaient jadis occupés de la même question.

Le principe fondamental de cette nouvelle *Géométrie générale*, pour employer l'expression de M. Tarry, est la conception du *point double* (M, M') formé par le *couple* des deux points ordinaires M, M' pris dans un ordre déterminé; M et M' sont dits les *composantes positive* et *négative* du point (M, M') , qui devient *réel* quand les deux composantes coïncident.

J'avais essayé, de mon côté, d'étendre aux imaginaires la notion des coordonnées cartésiennes par la construction du point M donné par l'équipollence $m = x + y\varepsilon^{\theta}$, θ étant l'angle des axes coordonnés, et x, y les deux coordonnées imaginaires. Mais cette conception se trouvait incomplète et défectueuse, faute de la notion du point double, car un même point pouvait avoir une infinité de coordonnées différentes.

Si, au contraire, nous considérons les deux points M, M' définis par les équipollences

$$m = x + y\varepsilon^{\theta}, \quad m' = cjx + c jy.\varepsilon^{\theta},$$

il est facile de constater, soit géométriquement, soit par le calcul, que le point (M, M') est déterminé par ses coordonnées, et réciproquement les détermine.

Les deux relations ci-dessus peuvent s'exprimer par la formule unique

$$(m, m') = (x, cjx) + (y, c jy)\varepsilon^{\theta}.$$

équipollence *double*, qui les englobe toutes deux en une seule.

On démontre que les formules ordinaires de transformation de coordonnées s'appliquent identiquement aux points doubles de la *Géométrie générale* à deux dimensions, ce qui permet de généraliser d'une façon considérable les résultats de la *Géométrie ordinaire*.

Du même coup, on arrive à donner en quelque sorte une réalité objective et une absolue clarté à des notions de *Géométrie imaginaire* un peu obscures avec le langage habituel. Il est possible, sur ces données, d'établir un lien de plus entre l'Analyse et la *Géométrie* par le calcul des équipollences. Il est juste d'ajouter que Bellavitis avait entrevu cette notion du point double dans ses considérations sur les *points fictifs* des courbes.

M. BÉGIN fait la Communication suivante :

*Sur l'impossibilité d'une fonction d'une seule variable
à plus de deux périodes.*

Il suffit de faire voir que le module de $Aa + Bb - Cc$ peut être rendu aussi petit qu'on veut, A, B, C désignant trois périodes et a, b, c trois nombres entiers. Soit $C = \lambda A + \mu B$, où l'on peut supposer λ et μ positifs.

On aura

$$\begin{aligned} \pm \left(\lambda - \frac{a}{c} \right) &< \frac{\varepsilon}{c}, \\ \pm \left(\mu - \frac{b}{c} \right) &< \frac{\varepsilon}{c}, \\ \varepsilon &= \frac{1}{10^p}. \end{aligned}$$

Nous partageons la partie décimale de chacun des nombres λ et μ en tranches de p chiffres; toutes ces tranches ne pouvant être distinctes, on peut trouver deux entiers α et β tels que, dans chacun des deux nombres, la tranche d'ordre α soit identique à celle d'ordre $\alpha + \beta$. On choisit pour $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ les fractions décimales x et x' , qui ont respectivement pour périodes les nombres formés, dans λ et μ , par les chiffres situés depuis le commencement de la tranche α jusqu'au commencement de la tranche d'ordre $\alpha + \beta$, les chiffres situés à gauche de la tranche d'ordre α étant les mêmes; on aura, N et N' étant entiers,

$$\begin{aligned} x &= \frac{N}{10^{p\alpha} - 10^{p(\alpha+\beta)}}, & x' &= \frac{N'}{10^{p\alpha} - 10^{p(\alpha+\beta)}}, \\ \pm(\lambda - x) &< \frac{1}{10^{p(\alpha+\beta)}} < \frac{1}{10^p(10^{p\alpha} - 10^{p(\alpha+\beta)})}. \end{aligned}$$

On voit que cette démonstration ne repose que sur des considérations tout à fait élémentaires.

M. D'OCAGNE fait la Communication suivante :

*Sur une détermination particulière du centre de courbure
des lignes planes. Application aux courbes algébriques
d'ordre quelconque.*

Si l'on pose $P = x^2 + y^2$, on trouve facilement, pour l'expres-

sion de l'abscisse $ON = n$ du pied de la normale correspondant au point M.

$$(1) \quad n = \frac{1}{2} \frac{dP}{dx};$$

par suite,

$$\frac{dn}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d^2P}{dx^2}.$$

Mais, si ds est la différentielle de l'arc au point M, on a, en appelant Ω le centre de courbure correspondant et θ l'angle de la normale avec l'axe des x ,

$$\frac{dn}{ds} = \frac{\Omega N}{\sin \theta} \frac{1}{\Omega M}, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\sin \theta};$$

done

$$(2) \quad \frac{1}{2} \frac{d^2P}{dx^2} = \frac{\Omega N}{\Omega M} \frac{1}{\sin^2 \theta}.$$

Cette formule fait connaître le centre de courbure lorsque la courbe est définie par son équation en P et en x . Remarquons en passant qu'une telle équation représente, en même temps que la courbe, sa symétrique par rapport à l'axe des x .

Prenons, par exemple, la conique représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Cette équation peut s'écrire

$$P = \frac{c^2}{a^2} x^2 + 1,$$

La formule (2) donne donc, dans ce cas,

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{\Omega N}{\Omega M} \frac{1}{\sin^2 \theta},$$

d'où se déduit la construction du centre de courbure due à M. Mannheim.

Prenons une courbe algébrique quelconque, d'ordre m ; son équation peut s'écrire

$$(3) \quad y^m + X_1 y^{m-1} + X_2 y^{m-2} + \dots + X_m = 0.$$

où

$$X_k = a_k x^k + b_k x^{k-1} + \dots + l_k.$$

Gardant dans le premier membre tous les termes d'une même parité, faisant passer dans le second tous ceux de la parité contraire, élevant au carré, puis réunissant de nouveau tous les termes dans un même membre et réduisant, nous avons

$$x^{2m} + x^{2m-2}(2X_2 - X_1^2) + x^{2m-4}(X_2^2 - 2X_1X_3 + 2X_4) + \dots = 0$$

ou

$$(4) \quad P^m + P^{m-1}(-mx^2 + 2X_2 - X_1^2) + \dots = 0.$$

Il faut remarquer que cette dernière équation représente à la fois la courbe C proposée et sa symétrique C' par rapport à l'axe des x , car à chaque valeur de P correspondent deux points symétriques par rapport à cet axe.

Si nous donnons à x une certaine valeur, nous avons

$$\sum_{i=1}^{i=m} P_i = mx^2 - 2X_2 + X_1^2;$$

par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{d^2 P_i}{dx^2} = 2(m - X_2'' + X_1'^2 + X_1 X_1'') = 2(m - 2a_2 + a_1^2),$$

ou, d'après (2),

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{\Omega_i N_i}{\Omega_i M_i} \frac{1}{\sin^2 \theta_i} = m - 2a_2 + a_1^2.$$

Or, si nous remplaçons la courbe par le système de ses m asymptotes, a_1 et a_2 restent les mêmes; les rapports $\frac{\Omega_i N_i}{\Omega_i M_i}$ tendent vers l'unité. Appelant donc $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ les angles des asymptotes avec l'axe des x , on a

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{1}{\sin^2 \alpha_i} = m - 2a_2 + a_1^2.$$

De là ce théorème :

Si une droite quelconque coupe une courbe algébrique d'ordre m aux points $M_1, M_2, \dots, M_m$, sous les angles $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$, et ses m asymptotes sous les angles $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$; si une perpendiculaire quelconque à la première droite rencontre les

normales correspondantes aux points $N_1, N_2, \dots, N_m$, et si $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ sont les centres de courbure correspondants, on a

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{\Omega_i N_i}{\Omega_i M_i} \frac{1}{\sin^2 \theta_i} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{1}{\sin^2 \alpha_i}.$$

Si la courbe considérée est *isotropique*, le second membre de cette formule est nul, et l'on retombe sur une propriété que j'ai déjà obtenue d'une autre façon (*Journ. de Math. sp.*, p. 126, th. VI; 1887).

SÉANCE DU 18 FÉVRIER 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. RAFFY fait la Communication suivante :

Détermination de toutes les surfaces moulures applicables sur des surfaces de révolution.

D'après un théorème de M. Massieu, pour qu'une surface soit applicable sur une surface de révolution, il faut et il suffit que l'équation aux géodésiques de cette surface admette une intégrale linéaire et homogène (voir DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. III, p. 29). Appliquant ce principe aux moulures dont l'élément linéaire est

$$ds^2 = du^2 + (U - V)^2 dv^2,$$

on trouve qu'il doit exister une fonction C de u et de v et une fonction W' de v seulement, vérifiant le système

$$(1) \quad W' U' + \frac{\partial}{\partial v} C(U - V) = 0,$$

$$(2) \quad W'' + (U - V)^2 C'_u = 0,$$

Avant de résoudre ce système, nous remarquerons qu'on ne peut supposer $W' = 0$; car alors il vient, U_0 étant une fonction inconnue de u ,

$$C = \frac{U_0}{1 - V}, \quad C'_u = 0.$$

Si $U_0 = 0$, l'intégrale linéaire disparaît, puisque ses deux coefficients W' et C sont nuls. Si $U_0 \neq 0$, la fonction C ne saurait être indépendante de U que si U_0 et par suite U sont constants, auquel cas la moulure est une développable, ou si V est constant, auquel cas elle dégénère en une surface de révolution.

Cela posé, l'équation (1) intégrée par rapport à v donne

$$C = \frac{U_0 - WU'}{U - V},$$

et l'équation (2) devient, par substitution de C ,

$$(3) \quad W'' + UU'_0 - U_0 U' + VWU'' - VU'_0 + W(U'^2 - UU'') = 0.$$

Telle est l'équation qu'il s'agit de résoudre. Égalons à zéro sa dérivée seconde prise par rapport à u et à v , et divisons par la dérivée V' qui n'est pas nulle; nous trouvons

$$(4) \quad \frac{(VW)'}{V'} U''' + \frac{W'}{V'} (U'^2 - UU'')' = U''_0;$$

et, en différentiant une fois encore par rapport à v ,

$$(5) \quad U''' \frac{d}{dv} \frac{(VW)'}{V'} + (U'^2 - UU'')' \frac{d}{dv} \frac{W'}{V'} = 0.$$

Dans cette dernière équation, on ne peut supposer à la fois

$$U''' = 0, \quad (U'^2 - UU'')' = U'U'' - UU''' = 0,$$

car alors $U''' = 0$; les moulures seraient des développables.

Si donc on fait $U''' = 0$, on devra supposer le rapport $W' : V'$ constant. Soient alors

$$U = au^2 + b, \quad W = 3mV + n.$$

L'équation (1) intégrée deux fois donne

$$U'_0 = 3m(U'^2 - UU'') + p, \quad U_0 = 2ma^2u^3 + (6mab - p)u + q,$$

tandis que l'équation (3) devient

$$W'' + 2aVW - Vp + n(U'^2 - UU'') + UU'_0 - U_0U' = 0.$$

Les termes en v et les termes en u doivent séparément se réduire à des constantes. Or les termes en u forment un polynôme du quatrième degré dont le terme en u^4 a pour coefficient $2ma^3$. Donc $m = 0$, d'où résulte $W' = 0$, solution exclue.

Nous devons donc désormais supposer $U''' \neq 0$. Je dis qu'on ne peut supposer le rapport $W' : V'$ constant, car il faudrait alors que le rapport $(VW)' : V'$ fût constant aussi. On aurait donc

$$W = 3mV + n, \quad VW = \alpha V + \beta,$$

d'où l'équation du second degré à coefficients constants

$$3mV^2 + (n - \alpha)V - \beta = 0,$$

qui devrait, puisque V n'est pas constant, avoir lieu indépendamment de V . Donc en particulier $m = 0$ et, par suite, $W' = 0$, solution exclue.

La seule et dernière hypothèse à faire est donc

$$U''' \neq 0, \quad \frac{d}{dv} \frac{W'}{V'} \neq 0.$$

On peut diviser les deux membres de l'équation (5) par le produit de ces quantités; alors l'équation se décompose en deux

$$\frac{(U'^2 - UU'')'}{U'''} = - \left[\frac{d}{dv} \frac{(VW)'}{V'} \right] : \left[\frac{d}{dv} \frac{W'}{V'} \right] = \text{const.} = \gamma.$$

De ces deux relations on tire successivement

$$(6) \quad (U'^2 - UU'')' = \gamma U''', \quad (VW)' + \gamma W' = nV',$$

$$(7) \quad U'^2 - UU'' = \gamma U'' + \delta; \quad (W - n)(V + \gamma) = h.$$

Substituant les expressions (6) dans l'équation (4) il vient

$$U''_0 = nU''', \quad U_0 = nU' + pu + q.$$

Avec cette valeur de U_0 , l'équation (3) devient, en égard aux relations (7),

$$(3') \quad W'' - pV + \delta(W - n) + pU - (pu + q)U' + hU'' = 0.$$

Donc les termes en u doivent avoir une somme constante. Mais, en vertu d'une des relations (7), on a

$$U''' : U'' = U' : (U + \gamma), \quad U'' = a^2(U + \gamma),$$

ce qui montre, a ne pouvant être nul, que la fonction U est périodique. Par suite p est nul. Donc nous avons à la fois

$$(8) \quad qU' - hU'' = 0, \quad U''U' - (U + \gamma)U''' = 0.$$

Or h n'est pas nul, sans cela W se réduirait à la constante n ,

solution exclue. Ainsi on peut éliminer U' et U''' de ces deux relations (8), ce qui donne

$$U' : (U + \gamma) = q : h = a, \quad U + \gamma = e^{au}.$$

Mais alors tous les termes qui, dans la relation (3'), dépendent de u se détruisent, et il reste

$$W'' + \delta (W - n) = 0.$$

Or, avec la valeur trouvée pour U , la première des équations (7) entraîne $\delta = 0$. On a donc $W'' = 0$. Alors la seconde des équations (7) donne pour $V + \gamma$ une expression qu'on peut écrire $b : c$, b étant une nouvelle constante; d'où finalement

$$U - V = e^{au} - \frac{b}{c},$$

et l'on retrouve les moulures déjà obtenues par M. Dini comme solution d'un problème moins général.

M. D'OCACXE fait la Communication suivante :

Sur les substitutions linéaires d'une seule variable à coefficients périodiques.

Si l'on répète indéfiniment la même substitution linéaire

$$x_1 = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad x_2 = \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{ax_{n-1} + b}{cx_{n-1} + d}, \quad \dots$$

on a

$$x_n = \frac{A_n x + B_n}{C_n x + D_n}.$$

Le problème qui consiste à trouver les valeurs de A_n , B_n , C_n , D_n en fonction de a , b , c , d a été résolu d'une façon ingénieuse par M. le prince de Polignac (*Bulletin de la Société mathématique*, p. 120; 1876). En voici une solution plus directe :

On voit facilement que les quatre séries de quantités A , B , C , D satisfont à une même loi de récurrence

$$U_n = (a + d)U_{n-1} + (bc - ad)U_{n-2}$$

(où l'on remplace successivement U par A , B , C , D) avec les conditions initiales

$$\begin{array}{cccc} A_0 = 1, & B_0 = 0, & C_0 = 0, & D_0 = 0, \\ A_1 = a, & B_1 = b, & C_1 = c, & D_1 = d. \end{array}$$

Donc, en vertu d'une formule que nous avons démontrée autrefois [*Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 71; 1884⁽¹⁾], on a, en posant

$$a + d = \lambda, \quad bc - ad = \mu,$$

et

$$i = E\left(\frac{n-1}{2}\right) \\ u_n = \sum_{i=0} C_{n-i+1}^i \lambda^{n-2i+1} \mu^i,$$

les formules suivantes :

$$A_n = au_n + \mu u_{n-1},$$

$$B_n = bu_n.$$

$$C_n = cu_n.$$

$$D_n = du_n + \mu u_{n-1},$$

qui résolvent le problème.

Supposons maintenant que les coefficients des substitutions successives, au lieu d'être constants, se reproduisent périodiquement, c'est-à-dire qu'on ait

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}, & x_2 &= \frac{a_2 x_1 + b_2}{c_2 x_1 + d_2}, & \dots & & x_k &= \frac{a_k x_{k-1} + b_k}{c_k x_{k-1} + d_k}, \\ x_{k+1} &= \frac{a_1 x_k + b_1}{c_1 x_k + d_1}, & x_{k+2} &= \frac{a_2 x_{k+1} + b_2}{c_2 x_{k+1} + d_2}, & \dots & & \dots & \end{aligned}$$

On voit alors que les quantités A et B sont données par la série récurrente à coefficients périodiques

$$U_{nk+i} = \alpha_i U_{nk+i-1} + \beta_i U_{nk+i-2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha_i = a_i + \frac{b_i}{b_{i-1}} d_{i-1}, \\ \beta_i = \frac{b_i}{b_{i-1}} (b_{i-1} c_{i-1} - a_{i-1} d_{i-1}); \end{cases}$$

les quantités C et D par la suivante

$$V_{nk+i} = \gamma_i V_{nk+i-1} + \delta_i V_{nk+i-2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \gamma_i = \frac{c_i}{c_{i-1}} c_{i-1} + d_i, \\ \delta_i = \frac{c_i}{c_{i-1}} (b_{i-1} c_{i-1} - a_{i-1} d_{i-1}). \end{cases}$$

Écrivons $2k+1$ formules consécutives de la série U, et sur les

(¹) Nous avons donné la généralisation explicite de cette formule dans le même Recueil (année 1890, p. 93).

$2k + 1$ termes qu'elles renferment, éliminons les $2k - 2$ autres que U_{nk+i} , $U_{(n-1)k+i}$ et $U_{(n-2)k+i}$. Il vient, après des calculs que nous supprimons,

$$U_{nk+i} = LU_{(n-1)k+i} - MU_{(n-2)k+i},$$

où, en représentant par $R\left(\frac{k-1}{2}\right)$ le reste, 0 et 1, de la division $k-1$ par 2,

$$\begin{aligned} L &= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k + \sum_{i=1}^{i=\mathbb{E}\left(\frac{k-1}{2}\right)} \sum_{j=1}^{j=k} \alpha_j \alpha_{j+1} \dots \alpha_{j+k-2i-1} \beta_{j-1} \beta_{j-3} \dots \beta_{j-1-2(i-1)} \\ &+ R\left(\frac{k-1}{2}\right) (\beta_1 \beta_3 \beta_5 \dots \beta_{k-1} + \beta_2 \beta_4 \dots \beta_k), \\ M &= (-1)^{k-1} \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_k, \end{aligned}$$

étant entendu que, dans la double somme qui figure dans l'expression de L , les indices sont pris résiduairement par rapport au module k . Les expressions de L et de M ne changeant pas par permutation circulaire, la loi de récurrence est la même pour les coefficients pris de k en k , à partir de l'un quelconque des termes de la première période.

Pour les coefficients C et D , il suffit, dans ce qui précède, de changer α en γ et β en δ .

Pour achever la question, il n'y a plus qu'à appliquer la formule rappelée plus haut.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Remarques sur les lignes asymptotiques des surfaces réglées dont les génératrices appartiennent à une congruence linéaire; par M. CH. BICHÉ.

1. M. PICARD a remarqué que, si les génératrices d'une surface gauche appartiennent à un complexe linéaire, il existe sur cette surface une courbe C dont les tangentes appartiennent à ce complexe. Cette courbe est ligne asymptotique de la surface; elle rencontre chaque génératrice en deux points, et son degré est égal à la classe des sections planes (*Annales de l'École Normale*; 1877).

2. En particulier, si une surface réglée admet deux directrices rectilignes, les asymptotiques sont les courbes C dont les tangentes appartiennent aux divers complexes linéaires par rapport auxquels les directrices sont des droites conjuguées. M. Halphen a remarqué que ces courbes divisent harmoniquement les segments déterminés sur les génératrices par les directrices (*Bull. de la Soc. math.*, p. 134; 1877). Il est facile de reconnaître ce fait en remarquant que les surfaces considérées sont des transformées par homographie des conoïdes; or, pour le conoïde

$$y' = ux, \quad z = f(u),$$

les lignes asymptotiques sont données par

$$x^2 = C f'(u), \quad y^2 = C u^2 f'(u), \quad z = f(u);$$

l'axe situé à distance finie passe par le milieu du segment que détermine une asymptotique.

3. M. Halphen, dans la Note citée, dit que la classe des asymptotiques est égale à six fois l'excès de leur degré sur le degré de la surface. Ce nombre est trop élevé. L'ordre et la classe d'une courbe dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire s'expriment par le même nombre.

Donc, pour les surfaces gauches douées de deux directrices rectilignes, la classe des asymptotiques et leur ordre s'expriment par le même nombre.

Si p et q sont les degrés de multiplicité des deux directrices, d étant le nombre des génératrices doubles, le degré de la surface est

$$m = p + q;$$

le degré et la classe des asymptotiques sont égaux à

$$2(pq - d).$$

4. Cette détermination se rapporte aux courbes C , dont les tangentes appartiennent à l'un des complexes linéaires par rapport auxquels les directrices sont conjuguées. Ou, autrement dit, elle n'est exacte que si les asymptotiques rencontrent deux fois chaque génératrice: il peut arriver que chaque courbe C se décompose en deux. Ainsi, pour les surfaces

$$z = \left(\frac{y}{x} \right)^{2p-1},$$

les asymptotiques sont

$$x = \Lambda t^{p-1}, \quad y = \Lambda t^p, \quad z = t^{2p-1},$$

Λ étant une constante. Les courbes C signalées par M. Picard se composent de deux asymptotiques correspondant à deux valeurs égales et de signes contraires de la constante Λ . La classe d'une section plane est en général $2(2p-1)$; le degré et la classe d'une asymptotique isolée sont égaux à $2p-1$.

5. Si les deux directrices de la surface considérée viennent à se confondre, le degré et la classe des asymptotiques sont toujours égaux; mais leur valeur commune est inférieure au nombre qui donne la classe d'une section plane. Ce fait s'explique, si l'on remarque que, dans ce cas, la droite Δ suivant laquelle les deux directrices sont confondues appartient aux complexes dont font partie les génératrices de la surface. La courbe C correspondant à un de ces complexes se compose donc d'une asymptotique et de la droite Δ . L'abaissement du degré des asymptotiques peut être de plusieurs unités. Je renvoie, pour cette question, à un Mémoire dans lequel M. Cremona, au moyen de la représentation des surfaces sur un plan, a évalué les degrés des asymptotiques des surfaces réglées unicursales qui ont deux directrices distinctes ou coïncidentes. (*Annali di Matematica*, 2^e série, t. I, p. 248 à 258; 1867-1868.)

6. Il est d'ailleurs facile d'obtenir l'équation générale des surfaces gauches dont les génératrices font partie d'une congruence linéaire singulière. Les équations d'une droite rencontrant l'axe Oz peuvent s'écrire

$$\frac{X}{\sin \theta \cos \varphi} = \frac{Y}{\sin \theta \sin \varphi} = \frac{Z - \xi}{\cos \theta}.$$

Si ξ , θ , φ sont fonctions d'une seule variable, la droite engendre une surface. Pour qu'elle rencontre une seconde directrice rectiligne,

$$X = a, \quad Y = Z \tan \alpha,$$

il faut que ξ , θ , φ soient liées par l'équation

$$\xi = a \tan \varphi \cot \alpha = \frac{a}{\cos \varphi} \cot \theta.$$

Si les deux directrices tendent à se confondre, on a

$$\zeta = m \tan \varphi,$$

en posant

$$\lim a \cot z = m.$$

Les équations de la génératrice donnent alors

$$\tan \varphi = \frac{Y}{X}, \quad \cot \theta = \frac{ZX - mY}{X\sqrt{X^2 + Y^2}} = \cos \varphi \frac{ZX - mY}{X^2},$$

de sorte que l'équation générale cherchée peut s'écrire

$$ZX - mY = X^2 F\left(\frac{Y}{X}\right).$$

7. Les coordonnées d'un point de la surface peuvent s'exprimer par

$$X = \lambda, \quad Y = \lambda u, \quad Z = mu + \lambda F(u);$$

toute relation entre λ et u définit une courbe sur la surface. Si l'on écrit que le plan osculateur à une courbe contient la génératrice, on trouve

$$2m \frac{d\lambda}{du} - \lambda^2 F''(u) = 0;$$

d'où l'on tire

$$\lambda = \frac{2m}{C - F'(u)},$$

C étant une constante. Les asymptotiques sont donc données par

$$X = \frac{2m}{C - F'(u)}, \quad Y = \frac{2mu}{C - F'(u)}, \quad Z = \frac{2m F(u) - mu F'(u) + Cmu}{C - F'(u)}.$$

On a ainsi, d'après une remarque de M. Kœnigs (*Annales de la Faculté de Toulouse*; 1887), les équations générales des courbes qui ont Oz pour axe anharmonique, c'est-à-dire des courbes telles que les points où Oz est rencontré par les points osculateurs menés en quatre points quelconques ont même rapport anharmonique que les plans passant par Oz et par ces points.

Sur les surfaces gauches dont les lignes de courbure possèdent une propriété donnée; par M. CH. BIOCHE.

1. Si l'on détermine un point sur une surface gauche par la

distance r de ce point au point central correspondant, et par l'arc s de la ligne de striction terminé en ce point central, l'équation des lignes de courbure peut s'écrire

$$\frac{dr^2}{ds^2} + \varphi(r) \frac{dr}{ds} + \psi(r) = 0,$$

φ et ψ étant des polynômes du second degré en r , dont les coefficients sont fonctions de s . On peut reconnaître, par une discussion simple, que, pour que les expressions de $\frac{dr}{ds}$ fournies par cette équation soient rationnelles en r , il faut et il suffit que $\psi(r)$ soit identiquement nul (voir *Bull. de la Soc. math.*, p. 121; 1888). Les surfaces correspondantes sont celles dont le paramètre de distribution est constant, et dont la ligne de striction est ligne de courbure. Je les appellerai, pour abrégé, *surfaces* Σ .

2. On déduit immédiatement de ce qui précède que, si un système de lignes de courbure d'une surface réglée possède une propriété exprimable par une équation différentielle du premier ordre rationnelle en r , cette surface appartient à la catégorie des surfaces Σ , à moins que l'équation différentielle en question ne soit vérifiée pour toutes les courbes tracées sur la surface, c'est-à-dire ne se réduise à une identité.

3. Cette remarque permet de résoudre la question suivante : Quelles sont toutes les surfaces dont un système de lignes de courbure est composé de trajectoires des génératrices? Il suffit d'exprimer la condition donnée par une équation du premier ordre. Or, si une ligne de courbure coupe les génératrices sous un angle constant i , en chaque point de cette ligne l'asymptotique fait avec la génératrice l'angle $2i$, et l'on trouve facilement

$$\tan^2 2i = F(r),$$

F étant une fonction rationnelle. Un des systèmes des lignes de courbure des surfaces cherchées vérifie donc l'équation

$$\frac{d}{ds} F(r) = 0.$$

Cette équation se réduit à une identité pour l'hélicoïde minimum, et seulement dans ce cas; car cette surface est la seule dont les asymptotiques soient trajectoires des génératrices. Ce cas

écarté, on trouve des surfaces Σ dont les lignes de courbure sont données par

$$\frac{dr}{ds} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dr}{ds} + \varphi(r) = 0.$$

4. Le second système ne peut être composé de trajectoires, car $\varphi(r)$ contient un terme du second degré en r . Or j'ai démontré (*Annales de la Faculté de Toulouse*; 1889) qu'un système vérifiant une équation de Riccati où le terme en r^2 figure effectivement ne peut être composé de trajectoires. Si le premier système est composé de trajectoires, la ligne de striction, qui est l'une d'elles, est géodésique, d'après un théorème de M. Bonnet. Les surfaces cherchées ont donc leur ligne de striction, ligne de courbure et ligne géodésique, le paramètre de distribution étant constant : ce sont des surfaces de révolution.

Donc *les seules surfaces dont un système de lignes de courbure soit composé de trajectoires sont :*

1^o La *surface gauche de révolution* : les trajectoires considérées sont les parallèles;

2^o L'*hélicoïde minimum* : toutes les lignes de courbure sont trajectoires, et l'angle est de 45° pour toutes.

5. Sur les surfaces Σ , le long d'une ligne de courbure de même système que la ligne de striction, la courbure totale est constante, et l'angle du plan tangent avec le plan central est constant. La remarque dont je me suis servi permet de reconnaître que les surfaces Σ sont les seules jouissant d'une de ces propriétés. On peut voir de même que, si le long de chaque ligne de courbure d'un système la courbure moyenne est constante, la surface correspondante est une surface de révolution ou un hélicoïde minimum.

Remarque sur l'interpolation; par M. C.-A. LAISANT.

La formule d'interpolation de Lagrange donne, comme l'on sait, sous forme entière de degré $n - 1$, une fonction u de x , assujettie à prendre les valeurs

$$u_1, \quad u_2, \quad \dots, \quad u_n$$

pour les valeurs données de x

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Elle peut s'écrire

$$(1) \quad u = X_1 a_1 + X_2 a_2 + \dots + X_n a_n,$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ étant des polynômes en x tels que X_k s'annule pour les valeurs $a_1, a_2, \dots$ autres que a_k , et se réduit à l'unité pour $x = a_k$.

De cette formule (1) il est possible de déduire une infinité de fonctions de x satisfaisant aux mêmes conditions. Soient, en effet, $t = \varphi(z)$ une fonction arbitraire d'une seule variable, et φ^{-1} la caractéristique de la fonction inverse, c'est-à-dire telle que

$$z = \varphi^{-1}(t).$$

Il s'ensuit que

$$\varphi[\varphi^{-1}(t)] = t, \quad \varphi^{-1}[\varphi(z)] = z.$$

Si, dans la formule (1), nous remplaçons $a_1, a_2, \dots, a_n$ par $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_n)$, et si nous écrivons

$$(2) \quad \varphi^{-1}[X_1 \varphi(a_1) + X_2 \varphi(a_2) + \dots + X_n \varphi(a_n)],$$

il est bien évident que cette nouvelle fonction satisfera encore aux conditions imposées; car, pour $x = a_k$ par exemple, la quantité entre parenthèses se réduira à $\varphi(a_k)$, si bien que nous aurons

$$\varphi^{-1}[\varphi(a_k)] = a_k.$$

Cette remarque s'applique évidemment à toute formule d'interpolation où figurent les valeurs données $a_1, a_2, \dots$ de la fonction cherchée. Ainsi, Cauchy (*Analyse algébrique*, Note V) a donné une formule, sous forme fractionnaire, qui peut s'écrire

$$(3) \quad u = \frac{F(x, a_1, a_2, \dots)}{f(x, a_1, a_2, \dots)}.$$

On en déduira la formule beaucoup plus générale

$$(4) \quad u = \varphi^{-1} \left\{ \frac{F[x, \varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots]}{f[x, \varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots]} \right\},$$

puisque la quantité entre crochets se réduit à $\varphi(a_k)$ pour $x = a_k$; d'où

$$u = \varphi^{-1}[\varphi(a_k)] = a_k.$$

Pour nous en tenir à la formule de Lagrange, nous nous borne-

rons, en terminant, à indiquer les formules suivantes, résultant des hypothèses $\varphi(\bar{z}) = \bar{z}^2, \sqrt{\bar{z}}, e^{\bar{z}}, l\bar{z}, \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}$:

$$(5) \quad u = \sqrt[2]{X_1 u_1^2 + X_2 u_2^2 + \dots}$$

$$(6) \quad u = (X_1 \sqrt{u_1} + X_2 \sqrt{u_2} + \dots)^2,$$

$$(7) \quad u = l(X_1 e^{u_1} + X_2 e^{u_2} + \dots),$$

$$(8) \quad u = e^{X_1 l u_1 + X_2 l u_2 + \dots},$$

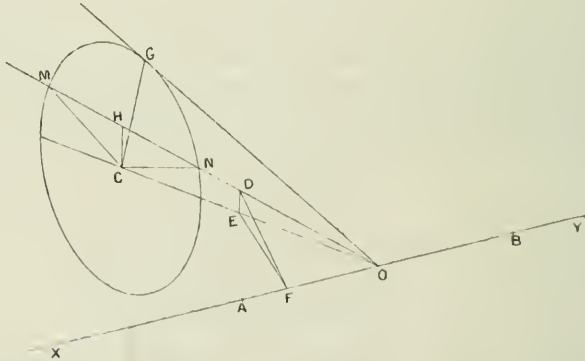
$$(9) \quad u = \frac{1 + X_1 \frac{u_1 - 1}{u_1 + 1} + X_2 \frac{u_2 - 1}{u_2 + 1} + \dots}{1 - X_1 \frac{u_1 - 1}{u_1 + 1} - X_2 \frac{u_2 - 1}{u_2 + 1} - \dots}.$$

On comprend tout l'intérêt qu'offre cette latitude laissée à la forme de la fonction, et qui permet de faire un choix, suivant la nature du problème qui a donné naissance à la question d'interpolation qu'on se propose de résoudre.

Sur les sections circulaires du tore; par M. E. VICAIRE.

Yvon Villarceau a découvert par l'analyse la propriété remar-

Fig. 1.



quable que possèdent les plans bitangents au tore de donner des sections circulaires.

MM. Rouché et de Comberousse, dans leur *Traité de Géomé-*

trie, ont donné de ce théorème une démonstration synthétique qui ne laisse pas que d'être un peu compliquée. Puisqu'il a pénétré ainsi dans la Géométrie classique, peut-être qu'une démonstration plus simple offrira quelque intérêt.

Soient :

O le centre de tore ;

C celui d'une section méridienne quelconque ;

XOY la trace sur le plan de l'équateur d'un plan sécant qui rencontre cette section aux points M et N.

Dans les triangles MCO, NCO, qui ont l'un et l'autre pour côtés le rayon r du méridien et le rayon $OC = d$ du cercle moyen, on a

$$\frac{\sin M}{\sin MOC} = \frac{\sin N}{\sin MOC} = \frac{d}{r}.$$

Dans les trièdres OXCM, OYCM, rectangles suivant l'arête OC, on a

$$\frac{\sin MOX}{\sin MOC} = \frac{\sin MOY}{\sin MOC} = \frac{1}{\sin \varphi},$$

en désignant par φ l'angle sous lequel le plan sécant NOM rencontre le plan de l'équateur.

Or, si ce plan sécant est le plan bitangent, on a précisément $\sin \varphi = \frac{r}{d}$. Donc les angles M et N, supplémentaires l'un de l'autre, sont respectivement égaux à MOX et à MOY.

Si, pour fixer les idées, MOX est aigu, il sera égal à M, et MOY sera égal à N.

Cela étant, portons sur XY, de part et d'autre du point O, les longueurs $OA = OB = r$; les triangles MOA, NOB sont respectivement égaux à OMC et à ONC, et leurs côtés MA et NB sont l'un et l'autre égaux à OC, ce qui démontre le théorème.

On peut aisément, pour être tout à fait classique, éviter l'emploi de la Trigonométrie.

D'un point D, pris arbitrairement sur OM, abaissons les perpendiculaires DE, DF sur OC et sur ON; l'angle DFE $= \varphi$ est, pour le plan bitangent, égal à l'angle COG, formé avec OC par la tangente au méridien, et les triangles rectangles semblables COG,

DFE donnent

$$\frac{DE}{DF} = \frac{r}{d}.$$

D'autre part, H étant le milieu de MN, les triangles rectangles semblables CHO, DEO donnent

$$\frac{CH}{DE} = \frac{d}{DO}.$$

En multipliant membre à membre, il vient

$$\frac{CH}{DF} = \frac{r}{DO},$$

ce qui démontre la similitude des triangles rectangles MCH, ODF, et par conséquent l'égalité des angles O et M, d'où le reste de la démonstration.

Sur la réduction des fonctions entières algébriques;

par M. A.-E. PELLET.

1. Soit $f(x) = 0$ une équation algébrique à coefficients entiers. Si elle est irréductible suivant un module premier p , elle est irréductible *a fortiori* algébriquement; si, suivant le module premier p , elle se décompose en deux facteurs irréductibles de degrés μ et ν par exemple, elle est irréductible algébriquement ou se décompose en deux facteurs de degrés μ et ν , irréductibles. Ces propositions permettent souvent de reconnaître si une équation est irréductible, et, dans le cas contraire, donnent des indications précieuses sur la manière dont elle peut se décomposer.

Supposons que $f(x) = 0$ soit irréductible et que toutes ses racines puissent s'exprimer rationnellement en fonction de l'une d'elles; m étant le degré de $f(x)$ et x une racine de $f(x) = 0$, les autres seront $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, ..., $\theta_{m-1}(x)$, ces fonctions θ étant entières en x et ayant pour coefficients des nombres commensurables, entiers ou fractionnaires. Si toutes ces fonctions θ sont distinctes suivant un module premier p , $f(x)$ se décompose suivant ce module en facteurs irréductibles d'égal degré. Mais il n'en est plus ainsi si quelques-unes des fonctions θ deviennent égales entre

elles (mod p), ou si p divise le dénominateur de quelques-uns des coefficients entrant dans les fonctions θ .

Soit, dans tous les cas,

$$f(x) \equiv f_1^{n_1}(x) f_2^{n_2}(x) \dots f_k^{n_k}(x) \pmod{p},$$

$f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ étant des fonctions irréductibles mod p et entrant respectivement $n_1, n_2, \dots, n_k$ fois comme facteurs dans $f(x)$, suivant le mod p ; le degré de $f(x)$ est un multiple des degrés de $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$. En effet, les racines de la congruence $f_1(x) \equiv 0 \pmod{p}$ peuvent être représentées par $x, \psi(x), \psi^2(x), \dots, \psi^{\mu-1}(x)$, μ étant le degré de $f_1(x)$. $\psi(x)$ une fonction entière, $\psi^2(x)$ représentant $\psi[\psi(x)]$, et en général

$$\psi[\psi^j(x)] = \psi^{j+1}(x).$$

La fonction $\psi(x)$ est congrue suivant le module p , et la fonction modulaire $f_1(x)$ à l'une des fonctions θ , soit θ_1 . Le plus petit nombre ν , tel que $\theta_1^\nu(x) - x$ soit divisible par $f(x)$ algébriquement, est un diviseur de m , degré de l'équation $f(x)$, et aussi un multiple de μ ; donc μ est un diviseur de m .

Revenant au cas où $f(x) = 0$ est une équation quelconque à coefficients entiers, soit $F(v) = 0$ son équation résolvante. Les racines de $f(x) = 0$ s'expriment rationnellement en fonction d'une quelconque des racines de l'équation $F(v) = 0$. Suivant un module quelconque premier p , $F(v)$ se décompose en facteurs irréductibles dont les degrés divisent le degré de $F(v)$. La fonction résolvante v étant convenablement choisie, chacune des racines de la congruence $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ peut s'exprimer en fonction entière des racines de la congruence $F(v) \equiv 0 \pmod{p}$; les degrés des facteurs de $f(x)$ sont donc diviseurs du plus petit commun multiple des degrés des facteurs de $F(v)$, suivant le module p . Ainsi :

Le degré de l'équation résolvante d'une équation à coefficients entiers est un multiple des degrés des divers facteurs irréductibles en lesquels se décompose le premier membre de l'équation suivant un module premier quelconque.

Par exemple, $x^2 - x + 1$ est irréductible suivant le module 2; elle admet, suivant le module 3, un facteur du premier degré

$x + 1$, et un autre du troisième degré $x^3 - x^2 + x + 1$; la résolvante de l'équation du quatrième degré $x^4 - x + 1 = 0$, ou de l'équation plus générale $\Lambda(x^4 - x + 1) + 6f(x) = 0$, Λ étant un nombre premier avec 6, et $f(x)$ un polynôme du quatrième degré à coefficients entiers, est donc d'un degré égal à 12 ou 24, et la résolution de cette équation exige l'extraction d'une racine cubique.

D'après un théorème de Galois, le degré de l'équation résolvante d'une équation de degré premier, irréductible, mais soluble par radicaux, est diviseur du produit $p(p-1)$, p étant le degré de l'équation. Il en résulte qu'une équation de degré premier p , à coefficients entiers, et irréductible, n'est pas soluble par radicaux si son premier membre se décompose, suivant certains modules premiers, en facteurs dont le degré ne divise pas $p-1$. Ainsi, $x^5 - x + 1$ est irréductible, module 5; suivant le module 2, cette fonction se décompose en un produit de deux facteurs irréductibles, de degrés 2 et 3,

$$x^5 - x + 1 \equiv (x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1) \pmod{2};$$

3 ne divisant pas 4, nombre auquel se réduit ici $p-1$, l'équation $x^5 - x + 1 = 0$, ou l'équation plus générale

$$\Lambda(x^5 - x + 1) + 10f(x),$$

Λ étant un entier premier avec 10, $f(x)$ un polynôme entier du cinquième degré à coefficients entiers, n'est pas soluble par radicaux.

2. Le théorème suivant peut être utile dans la décomposition d'une fonction entière en facteurs irréductibles suivant un module premier.

Le produit Δ des carrés des différences des racines d'une équation, irréductible et abélienne, $f(x) = 0$, est un carré parfait si le degré de l'équation est impair; dans le cas où le degré de $f(x)$ est pair, $\sqrt{\Delta}$ est une quantité irrationnelle.

Nous appelons *abéliennes*, suivant M. Kronecker, les équations irréductibles dont toutes les racines peuvent s'exprimer par x , $\theta(x)$, $\theta^2(x)$, ..., $\theta^{m-1}(x)$, x étant l'une d'elles, θ une fonction rationnelle, m le degré de l'équation.

Considérons le produit

$$(1) \quad P_{l=4}^{m-1} P_{k=0}^{k=l-1} [\theta^k(x) - \theta^l(x)],$$

x étant l'une des racines de $f(x) = 0$. Il acquiert deux valeurs égales et de signes contraires, si m est pair, lorsqu'on substitue $\theta(x)$ à x ; au contraire, si m est impair, il ne change pas par la substitution de $\theta(x)$ à x . Donc, dans le premier cas, l'équation $y^2 - \Delta = 0$, qui admet pour racine le produit (1), est irréductible; dans le second cas, lorsque m est impair, $y^2 - \Delta$ se décompose en un produit de deux facteurs rationnels.

Une congruence irréductible suivant un module premier est analogue à une équation abélienne; son Δ sera résidu quadratique si le degré de la congruence est impair, et non-résidu quadratique si son degré est pair. Plus généralement, soit $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ une congruence n'ayant pas de racines égales, on a

$$\Delta \equiv a^2 \delta_1 \delta_2 \delta_3 \dots \delta_k \pmod{p},$$

a étant un nombre entier, $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ les valeurs de Δ correspondant aux divers facteurs irréductibles de $f(x)$. Il en résulte que Δ est non-résidu quadratique $\pmod{p}$, si $f(x)$ admet un nombre impair de facteurs irréductibles de degré pair; Δ est au contraire résidu quadratique $\pmod{p}$, si $f(x)$ n'admet pas de facteur irréductible de degré pair ou en admet un nombre pair.

Ainsi, une congruence du quatrième degré, n'ayant pas de racine réelle, $\pmod{p}$, sera irréductible si son Δ est non-résidu quadratique; et une congruence du cinquième degré, n'ayant pas de racine réelle, sera irréductible si son Δ est résidu quadratique.

Exemple. — Soit la fonction

$$f(x) = x^6 - 12x^5 + 60x^4 + 123x^2 + 4567x - 89012$$

considérée par Fourier et Serret.

On a

$$f(x) \equiv x(x-1)(x^4 + 3x^3 - 3) \pmod{7}.$$

Le Δ de la congruence $x^4 + 3x^3 - 3 \equiv 0 \pmod{7}$, laquelle n'a pas de racine réelle, est congru à -2 , à un facteur quadratique près; -2 étant non-résidu quadratique $\pmod{7}$, $x^4 + 3x^3 - 3$ est irréductible suivant ce module 7.

$f(x)$, réduit à l'aide de $x^5 - 1 \equiv 0 \pmod{5}$, devient $-x^2 - 2$.

et la congruence $x^2 + 2 \equiv 0 \pmod{5}$ n'a pas de racine réelle; $f(x) = 0$ n'admet donc pas de racine commensurable, et ne peut algébriquement se ramener qu'à deux équations, l'une du quatrième degré, l'autre du deuxième, si elle n'est pas irréductible. Nous allons voir que $f(x)$ n'admet pas de facteur du deuxième degré $\pmod{5}$; il en résultera que $f(x)$ est irréductible algébriquement. En effet, $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ est irréductible. Soit i une de ses racines; on a

$$f(ai + b) \equiv 2a(a - 2b + 2)i + 3a^2 - b^2 - ab + 2a - 2 \pmod{5},$$

en remarquant que $(ai + b)^5 \equiv -ai + b - a \pmod{5}$; a et b sont des nombres réels. Pour que $f(ai + b) \equiv 0 \pmod{5}$, il faut qu'on ait simultanément

$$a - 2b + 2 \equiv 0, \quad 3a^2 - b^2 - ab + 2a - 2 \equiv 0 \pmod{5};$$

d'où, par l'élimination de a ,

$$b^2 - 2b - 1 \equiv 0 \pmod{5};$$

or cette congruence n'a pas de racine réelle.

Suivant le module 11, $f(x)$ est congrue à $x(x^5 - x^4 + 5x^3 + 2)$. La fonction $x^5 - x^4 + 5x^3 + 2$ n'a pas de racine réelle, et son Δ est résidu quadratique $\pmod{11}$; elle est donc irréductible suivant ce module. L'équation $f(x) = 0$ est donc irréductible, et le degré de son équation résolvante est divisible par 4, 5 et 3, c'est-à-dire par 60.

Quelques formules relatives aux fonctions hyperboliques;
par M. C.-A. LAISANT.

Lorsque deux variables, x et y , sont liées par la relation

$$(1) \quad \sin x = \operatorname{Th} y,$$

x est dite *amplitude hyperbolique* de y ; et, réciproquement, on appelle y , d'après Gudermann, *longueur* de x .

Cette relation (1) entraîne les suivantes :

$$(2) \quad \operatorname{tang} x = \operatorname{Sh} y,$$

$$(3) \quad \cos x = \operatorname{Séch} y = \frac{1}{\operatorname{Ch} y}.$$

On a aussi

$$(4) \quad \operatorname{tang} \frac{x}{2} = \operatorname{Th} \frac{y}{2} = z.$$

La formule (3) peut s'écrire

$$\cos x \operatorname{Ch} y = 1,$$

et l'on en tire, par différentiation,

$$-\sin x \operatorname{Ch} y \, dx + \cos x \operatorname{Sh} y \, dy = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu des relations précédentes,

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \operatorname{Ch} y}{\cos x \operatorname{Sh} y} = \frac{1}{\cos x} = \operatorname{Ch} y.$$

Par conséquent,

$$dy = \frac{dx}{\cos x}, \quad dx = \frac{dy}{\operatorname{Ch} y}.$$

Intégrant,

$$(6) \quad \int \frac{dx}{\cos x} = y = \mathfrak{f} x.$$

$$(7) \quad \int \frac{dy}{\operatorname{Ch} y} = x = \operatorname{Amh} y.$$

D'ordinaire, on écrit la première de ces deux intégrales sous la forme plus compliquée

$$\log \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \quad \text{ou} \quad \log \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}.$$

La relation (5) peut encore s'écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{Sh} y}{\sin x} = \frac{\operatorname{tang} x}{\operatorname{Th} y}.$$

Donc

$$(8) \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dy}{\operatorname{Sh} y},$$

$$(9) \quad \int \operatorname{tang} x \, dx = \int \operatorname{Th} y \, dy.$$

L'emploi de la valeur z , introduite dans la formule (4) ci-dessus, permet de donner aux intégrales qui précèdent les formes

très simples

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dy}{\operatorname{Sh} y} = \log z,$$

$$\int \operatorname{tang} x \, dx = \int \operatorname{Th} y \, dy = \log \frac{1+z^2}{1-z^2},$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = 2 \operatorname{arg} \operatorname{Th} z, \quad \int \frac{dy}{\operatorname{Ch} y} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} z.$$

Il va de soi que les diverses intégrales ci-dessus doivent être prises entre les mêmes limites correspondantes pour que les formules soient valables.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 MARS 1891.

PRÉSIDENTE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur la représentation graphique des équations à quatre variables.*

M. Fouret : *Sur le centre des moyennes distances de plusieurs points.*

M. Humbert présente quelques observations à propos de cette Communication.

M. Carvallo : *Sur la démonstration du théorème de d'Alembert.*

M. Collignon présente deux tableaux graphiques donnant, l'un la distance de deux points sur la sphère, l'autre la résolution des triangles rectilignes.

M. Kœnigs : *Interprétation géométrique d'une forme donnée à l'intégrale de l'équation d'Euler.*

M. Humbert : *Génération des courbes algébriques tracées sur la surface de Kummer.*

M. RAFFY fait la Communication suivante :

Sur les surfaces moulures dont les lignes d'égale courbure sont parallèles.

Je vais montrer que toute surface moulure, dont les lignes

d'égale courbure sont parallèles, a pour élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + \left(e^{au} - \frac{b}{v} \right)^2 dv^2.$$

Pour que les courbes d'une famille $\varphi = \text{const.}$, tracées sur une surface d'élément linéaire

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

soient parallèles, il faut et il suffit, comme on sait, que le paramètre différentiel

$$\Delta\varphi = \frac{G\varphi_u'^2 - 2F\varphi_u'\varphi_v' + E\varphi_v'^2}{EG - F^2}$$

soit une fonction de φ . Appliquons cette règle aux surfaces mou-
lures; pour ces surfaces, on a

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = (U - V)^2.$$

Leur courbure totale, que je représente par $-\frac{1}{\varphi}$, est donnée par la formule connue

$$-\frac{1}{\varphi} = \frac{-1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = \frac{-U''}{U - V}.$$

Nous avons donc pour équation des lignes d'égale courbure

$$\varphi = \frac{U - V}{U''} = \text{const.},$$

et nous supposons la dérivée U'' essentiellement différente de zéro, afin d'exclure les surfaces développables.

Calculons le paramètre différentiel $\Delta\varphi$, en ayant soin d'y remplacer partout $U - V$ par le produit $\varphi U''$; nous trouvons

$$\Delta\varphi = \varphi_u'^2 + \frac{\varphi_v'^2}{G} = \frac{(U' - \varphi U''')^2}{U''^2} + \frac{V'^2}{\varphi^2 U''^4}.$$

Pour exprimer que $\Delta\varphi$ est une fonction de φ , nous égalons à zéro le déterminant fonctionnel $\varphi_v'\Delta_u' - \varphi_u'\Delta_v'$, dans lequel nous pourrions évidemment remplacer les dérivées Δ_u' et Δ_v' par les valeurs plus simples (Δ_u') , (Δ_v') , qu'elles prennent lorsqu'on les calcule en considérant φ comme constant, savoir :

$$(\Delta_u') = 2\varphi_u' \left[\left(\frac{U'}{U''} \right)' - \varphi \left(\frac{U'''}{U''} \right)' \right] - \frac{4U'''}{U''^3} \frac{V'^2}{\varphi^2}, \quad (\Delta_v') = \frac{2V'V''}{\varphi^2 U''^4}.$$

On trouve ainsi, en remplaçant φ'_u et φ'_v par leurs valeurs, une équation qui peut s'écrire

$$(U' - \varphi U'') \left[U'' V'' + U'' \left(\frac{U'}{U''} \right)' \varphi^2 - U'' \left(\frac{U'''}{U''} \right)' \varphi^3 \right] = 2 U'' V'^2.$$

C'est l'équation qui va nous déterminer les fonctions U et V . Pour la résoudre, nous prendrons V comme variable au lieu de v ; il suffira de remplacer V' par une fonction V_1 de V et V'' par $V_1 V'_1$, V'_1 étant la dérivée de V_1 par rapport à V . Il vient ainsi

$$(1) \quad \frac{V U''' + U' U'' - U U'''}{U''} \left[U'' V_1 V'_1 + U'' \left(\frac{U'}{U''} \right)' \varphi^2 - U'' \left(\frac{U'''}{U''} \right)' \varphi^3 \right] = 2 U'' V_1^2.$$

Je dis d'abord qu'on doit supposer $U''' \neq 0$. Soit, en effet, $U''' = 0$; la dérivée U'' sera une constante α , différente de zéro, et l'équation deviendra

$$U' [V_1 V'_1 + \alpha (U - V)^2] = 0,$$

ce qui exige $U' = 0$, solution à rejeter comme entraînant l'hypothèse exclue $U'' = 0$.

Cela posé, je dis que l'expression

$$\gamma = \frac{U U''' - U' U''}{U''}$$

se réduit à une constante. En effet, s'il n'en est pas ainsi, en attribuant à la variable V la succession des valeurs que prend cette expression quand u varie, on annulera le premier membre de notre équation: par suite, la fonction $V_1 = V'$ sera identiquement nulle, ce que nous ne supposons pas, l'hypothèse $V = \text{const.}$ réduisant les moulures à des surfaces de réduction. Il y a plus; on peut faire $\gamma = 0$. Car la formule précédente peut s'écrire

$$(U - \gamma) U''' - U' U'' = 0,$$

et l'on voit qu'il suffit de remplacer U par $U + \gamma$ et V par $V + \gamma$, ce qui ne change pas l'élément linéaire, pour être en droit de supposer $\gamma = 0$. Mais l'évanouissement de γ exprime que la dérivée U'' est dans un rapport constant avec la fonction U . Cette hypothèse

$$U = \alpha^2 U,$$

introduite dans l'équation (1), la réduit à

$$(2) \quad V^2(U - V)^2 \left(\frac{U'}{U} \right)' = V_1(2V_1 - VV_1').$$

Il suffit maintenant de faire $V = U$ pour voir que le second membre est identiquement nul; comme V_1 ne l'est pas, il reste

$$\frac{V_1'}{V_1} = \frac{2}{V}.$$

L'intégration donne successivement

$$V_1 = V' = -\frac{V^2}{b}, \quad V = \frac{b}{v - v_0},$$

en désignant par b et v_0 deux constantes arbitraires, dont la dernière peut être supposée nulle. Mais, le second membre de l'équation (2) étant nul, le premier l'est aussi; donc la dérivée logarithmique $U' : U$ est une constante. On a donc $U = e^{a(u-u_0)}$, et, comme l'arbitraire u_0 peut être supposée nulle, il reste

$$U - V = e^{au} - \frac{b}{v}.$$

ce qui démontre notre théorème.

Les moulures que nous venons de déterminer sont celles que M. Dini a trouvées (*Giornale di Matematica*, p. 65; 1865) en cherchant toutes les moulures qui s'appliquent sur des surfaces de révolution, de telle manière que leurs profils viennent coïncider avec des géodésiques sur lesquelles des arcs égaux soient interceptés par des courbes dont chacune coupe ces géodésiques sous le même angle. Elles sont engendrées par des tractrices allongées ou raccourcies dont le plan roule sur un cylindre convenable, la génératrice de contact étant la base de la courbe.

Il résulte de ce qui précède que toute moulure à lignes d'égale courbure parallèles est applicable sur une surface de révolution.

SÉANCE DU 18 MARS 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Élections : M. Fauquembergue, présenté par MM. Picquet et

Humbert; MM. Lery et Guimaraes, présentés par MM. Collignon et d'Ocagne, sont élus à l'unanimité.

Communications :

M. d'Ocagne présente un abaque faisant connaître la distance de deux points sur une sphère, en fonction de leurs latitudes et de la différence de leurs longitudes, et qui peut être considéré comme transformé de celui que M. Collignon a présenté dans la dernière séance.

M. Antomari : *Sur l'extension aux courbes gauches de la notion des diamètres de Newton.*

M. Fouret présente quelques observations sur le même sujet.

M. FOURET fait la communication suivante :

*Sur les congruences de droites du premier ordre
et de la première classe.*

1. Suivant une dénomination proposée par Plücker et généralement adoptée, on désigne, sous le nom de *congruence de droites du $m^{\text{ième}}$ ordre et de la $n^{\text{ième}}$ classe*, un ensemble de droites, en nombre doublement infini, remplissant l'espace, telles qu'il y en ait m passant par un point arbitraire et n contenues dans un plan arbitraire.

En partant de cette définition, nous allons démontrer, avec une extrême simplicité, que *les droites d'une congruence du premier ordre et de la première classe rencontrent deux mêmes droites, non situées dans un même plan*. Ce théorème est bien connu; mais, en raison de son importance, il y a peut-être quelque intérêt à y parvenir par une voie plus directe que celles habituellement suivies.

Nous ferons usage d'une remarque qui s'applique utilement dans d'autres circonstances semblables, et qui consiste en ce que, *si des surfaces algébriques d'un même degré, en nombre simplement infini, sont telles que, par tout point pris arbitrairement, il en passe une et une seule, ces surfaces forment un faisceau ponctuel* ⁽¹⁾.

(1) Une remarque analogue s'applique à des courbes algébriques situées dans un même plan.

En effet, ces surfaces sont définies par une même équation, renfermant un paramètre variable. La substitution, dans cette équation, des coordonnées d'un point arbitraire devant donner lieu à une valeur unique de ce paramètre, celui-ci doit entrer linéairement dans l'équation.

2. Nous allons maintenant démontrer deux théorèmes préliminaires sur les congruences du premier ordre et de la première classe, que nous appellerons abrégativement *congruences* $(1, 1)$.

THÉORÈME I. — *Les droites d'une congruence $(1, 1)$, qui rencontrent une même droite fixe arbitraire, forment une quadrique.*

Par la droite fixe D faisons passer un plan quelconque. Ce plan contient une droite de la congruence, et une seule, qui fait partie de la section par le plan de la surface engendrée. Cette section est complétée par la droite D , qui est une ligne simple de la surface, puisque, par chaque point de D , il passe une droite et une seule de la congruence. La surface est donc coupée par un plan quelconque passant par D , suivant deux droites : c'est par conséquent une quadrique.

THÉORÈME II. — *Les diverses quadriques engendrées par les droites d'une congruence $(1, 1)$, qui s'appuient sur des droites d'un même plan concourant en un même point, contiennent un même quadrilatère gauche.*

Considérons un faisceau de droites D , concourant en un même point p et contenues dans un même plan (P) . Chaque droite D donne lieu à une quadrique (S) engendrée par les droites de la congruence qui la rencontrent. Par tout point a pris arbitrairement passe une des quadriques (S) et une seule. Par ce point, en effet, passe une droite L et une seule de la congruence, à laquelle correspond une des droites D , celle qui joint le point p à la trace de L sur le plan (P) , et à cette droite D correspond une des quadriques (S) , la seule qui passe par le point a . Donc, en vertu d'une remarque faite au début de cette Note, les quadriques (S) forment un faisceau ponctuel.

D'autre part, toutes ces quadriques (S) ont en commun deux droites de la congruence : celle qui passe par le point p et celle qui

est contenue dans le plan (P), puisque ces deux droites rencontrent toutes les droites D. L'intersection commune des quadriques (S) comprend ainsi deux droites, qui, appartenant à la congruence, ne peuvent être dans un même plan. Par suite, d'après une proposition bien connue, le complément de cette intersection est formé de deux autres droites Δ et Δ' , réelles ou imaginaires conjuguées, s'appuyant sur les deux premières, c'est-à-dire formant avec elles un quadrilatère gauche.

3. Il n'y a qu'un mot à dire, pour déduire de ce qui précède le théorème qui fait l'objet principal de cette Note, à savoir :

THÉORÈME III. — *Les droites d'une congruence (1,1) rencontrent deux mêmes droites.*

En effet, toutes les droites de la congruence, qui servent à engendrer les quadriques (S), considérées dans la démonstration du théorème II, rencontrent les deux droites Δ et Δ' , ces droites Δ et Δ' étant, sur chaque surface (S), des génératrices d'un système autre que celui des génératrices formées par les droites de la congruence. Il est d'ailleurs facile de voir que toutes les droites de la congruence concourent à engendrer les quadriques (S). Considérons, en effet, une quelconque de ces droites L; elle est rencontrée par une droite D passant par le point p et située dans le plan (P), et cette droite D sert à engendrer une quadrique (S) qui contient L. Donc toute droite L de la congruence s'appuie sur les deux droites Δ et Δ' .

4. On peut déduire de là, comme conséquence immédiate, un beau théorème, bien connu, sur les déplacements à deux paramètres d'un solide invariable, qui a été établi pour la première fois par Schönemann et auquel M. Mannheim, par ses travaux, a donné une portée considérable.

Ce théorème consiste en ce que *les normales aux surfaces trajectoires des points d'un solide invariable, pour chaque position de ce solide, s'appuient sur deux mêmes droites.*

Montrons que ces normales forment une congruence (1,1) : la proposition en résultera. Or, en premier lieu, par chaque point de l'espace, considéré comme appartenant au solide, passe une telle droite, la normale à la surface décrite par ce point. D'autre part,

dans le cas général, deux pareilles normales N, N' ne peuvent se rencontrer. Supposons en effet qu'elles se rencontrent en un certain point i . Ou bien ce point sera fixe, aux infiniment petits près d'ordre supérieur, et alors toutes les normales iront y concourir, ce qui correspond à un cas particulier et exceptionnel du théorème. Ou bien le point i sera mobile; mais, dans cette hypothèse, deux points du solide, respectivement situés sur N et sur N' , décriront des surfaces parallèles à la surface décrite par i , ce qui entraîne la coïncidence des normales N et N' . D'ailleurs, deux normales N et N' ne pouvant avoir un point commun, quelque éloigné qu'on le suppose, ne peuvent pas non plus être parallèles.

On conclut de ce qui précède qu'il ne peut y avoir plus d'une normale passant par un point quelconque, ni plus d'une normale contenue dans un plan quelconque. Ces normales forment donc bien une congruence (1,1), et, par conséquent, d'après le théorème III, elles s'appuient sur deux mêmes droites.

M. ÉMILE PICARD fait la Communication suivante :

Sur le théorème général relatif à l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires.

Dans mon Mémoire sur les équations aux dérivées partielles (*Journal de Mathématiques*, 1890), j'ai proposé incidemment une démonstration nouvelle et extrêmement simple pour établir l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires. M'étant borné à l'équation du premier ordre, que j'ai d'ailleurs traitée très rapidement, je ne crois pas inutile d'exposer ici cette démonstration d'une manière complète et dans toute sa généralité.

1. Envisageons le système des m équations du premier ordre

$$\frac{du}{dx} = f_1(x, u, v, \dots, w),$$

$$\frac{dv}{dx} = f_2(x, u, v, \dots, w),$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$\frac{dw}{dx} = f_m(x, u, v, \dots, w).$$

Les fonctions f sont des fonctions continues réelles des quantités réelles $x, u, v, \dots, w$ dans le voisinage de $x_0, u_0, v_0, \dots, w_0$. Elles sont définies quand $x, u, v, \dots, w$ restent respectivement compris dans les intervalles

$$\begin{aligned} & (x_0 - a, \quad x_0 + a), \\ & (u_0 - b, \quad u_0 + b), \\ & (v_0 - b, \quad v_0 + b), \\ & \dots\dots\dots, \\ & (w_0 - b, \quad w_0 + b). \end{aligned}$$

a et b désignant deux grandeurs positives.

De plus, on suppose que l'on puisse déterminer m quantités positives $A, B, \dots, L$, telles que

$$\begin{aligned} & |f(x, u', v', \dots, w') - f(x, u, v, \dots, w)| \\ & < A. |u' - u| + B. |v' - v| + \dots + L. |w' - w| \end{aligned}$$

(où $|x|$ désigne, suivant l'usage, la valeur absolue de x), x ainsi que les $u, v, \dots, w$ restant dans les intervalles indiqués. Il en sera évidemment ainsi, en particulier, si les fonctions f ont des dérivées partielles du premier ordre, restant finies, par rapport à $u, v, \dots, w$.

Ces hypothèses très générales étant faites, on veut démontrer qu'il existe des fonctions $u, v, \dots, w$ de x , continues dans le voisinage de x_0 , satisfaisant aux équations différentielles et se réduisant respectivement, pour $x = x_0$, à $u_0, v_0, \dots, w_0$.

2. Nous procéderons par approximations successives. Considérons d'abord le système

$$\frac{du_1}{dx} = f_1(x, u_0, v_0, \dots, w_0), \quad \dots, \quad \frac{dw_1}{dx} = f_m(x, u_0, v_0, \dots, w_0);$$

nous en tirons, par quadratures, les fonctions $u_1, v_1, \dots, w_1$, en les déterminant de manière qu'elles prennent pour x_0 les valeurs $u_0, v_0, \dots, w_0$. On forme ensuite les équations

$$\frac{du_2}{dx} = f_1(x, u_1, v_1, \dots, w_1), \quad \dots, \quad \frac{dw_2}{dx} = f_m(x, u_1, v_1, \dots, w_1),$$

et l'on détermine $u_2, v_2, \dots, w_2$ par la condition qu'elles prennent respectivement pour x_0 les valeurs $u_0, v_0, \dots, w_0$. On continue ainsi indéfiniment. Les fonctions $u_{m-1}, v_{m-1}, \dots, w_{m-1}$ se-

et, d'une manière générale, de proche en proche, on voit que $|U_m|, \dots, |W_m|$ sont inférieurs à

$$M\delta(A+B+\dots+L)^{m-1}\delta^{m-1}.$$

Or

$$u_m = u_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_m;$$

par suite, $u_m, v_m, \dots, w_m$ tendront vers une limite, si

$$(A+B+\dots+L)\delta < 1.$$

En prenant δ assez petit, cette condition sera vérifiée. Nous voyons donc que $u_m, v_m, \dots, w_m$ tendront vers des limites déterminées $u, v, \dots, w$, fonctions continues de x dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, δ étant la plus petite des trois quantités

$$a, \quad \frac{b}{M}, \quad \frac{1}{A+B+\dots+L};$$

$u, v, \dots, w$ seront représentées par des séries qui convergent à la manière d'une progression géométrique décroissante.

On a d'ailleurs

$$u_m = \int_{x_0}^x f_1(x, u_{m-1}, \dots, w_{m-1}) dx + u_0,$$

et, puisque les $u_m, v_m, \dots, w_m$ diffèrent de leurs limites d'autant plus qu'on veut, pour m assez grand, quel que soit x dans l'intervalle indiqué, on aura, à la limite

$$u = \int_{x_0}^x f_1(x, u, v, \dots, w) dx + u_0;$$

et, par suite,

$$\frac{du}{dx} = f_1(x, u, v, \dots, w),$$

et de même pour les autres équations. Les fonctions $u, v, \dots, w$ sont donc les intégrales cherchées.

SÉANCE DU 1^{er} AVRIL 1894.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. FOURET : *Sur l'extension donnée par Poncelet à la notion de diamètres de Newton.*

M. FOURET : *Sur le lieu des points tels que la somme des carrés des longueurs des normales menées de l'un d'eux à une courbe gauche algébrique, soit constante.*

M. BEGHIN présente quelques observations sur le même sujet.

M. Kobb : *Sur les maxima et minima de certaines intégrales.*

M. RAFFY fait la Communication suivante :

Sur la déformation des surfaces spirales.

1. Le problème dont je vais d'abord indiquer la solution est le suivant :

Étant donné un élément linéaire, exprimé au moyen de variables quelconques, reconnaître s'il existe des spirales admettant cet élément linéaire.

Voici comment on devra procéder. Sauf pour la courbure totale, que je représente par $-2e^0$, j'emploie, pour les paramètres différentiels, les notations qu'on trouvera définies dans la *Théorie des surfaces* de M. Darboux (Livre VII, Chap. I).

Pour reconnaître si un élément linéaire, donné sous une forme quelconque, convient à des spirales, on calculera la courbure totale $-2e^0$ (qui ne peut être constante sans être nulle) et l'on formera l'invariant $e^{-0}\Delta\theta$.

S'il ne se réduit pas à une constante, on formera les deux invariants

$$\frac{\Theta(e^{-0}\Delta\theta, \theta)}{\Delta(e^{-0}\Delta\theta)}, \quad \frac{\Delta_2(e^{-0}\Delta\theta)}{\Delta(e^{-0}\Delta\theta)};$$

chacun d'eux devra être une fonction de $e^{-0}\Delta\theta$.

Si l'invariant $e^{-0}\Delta\theta$ est constant, on calculera l'invariant $e^{-0}\Delta_2\theta$. Si ce dernier est constant aussi, l'élément linéaire donné convient à des spirales en même temps qu'à des surfaces

de révolution. Si l'invariant $e^{-\theta} \Delta_2 \theta$ n'est pas constant, on formera

$$\frac{\Theta(e^{-\theta} \Delta_2 \theta, \theta)}{\Delta(e^{-\theta} \Delta_2 \theta)},$$

et ce nouvel invariant devra être une fonction de $e^{-\theta} \Delta_2 \theta$.

Je ne donnerai pas ici la démonstration de cette règle, parce qu'elle exigerait quelques développements. Je me bornerai à faire remarquer qu'en égalant à zéro les deux invariants $\Theta(e^{-\theta} \Delta \theta, \theta)$ et $\Theta(e^{-\theta} \Delta_2 \theta, \theta)$ on aurait les caractères spécifiques des surfaces applicables sur les surfaces de révolution.

2. Ce qui précède conduit à chercher les éléments linéaires qui conviennent à la fois à des spirales et à des surfaces de révolution.

Pour qu'un élément linéaire $e^{\omega} dx dy$ soit réductible à la forme

$$ds^2 = e^{-i(x'-y')} e^{fT(x'+y')d(x'+y')} dx' dy',$$

qui convient aux spirales, il faut et il suffit qu'après un changement de variables approprié

$$dx' = \frac{dx}{\xi(x)}, \quad dy' = \frac{dy}{\eta(y)}$$

on ait identiquement

$$\omega + \log \xi + \log \eta = -i(x' - y') + fT(x' + y')d(x' + y').$$

Pour éliminer la fonction inconnue T, différencions par rapport à x' et à y' ; nous aurons

$$\xi \left(\omega'_x + \frac{\xi'}{\xi} \right) = T - i, \quad \eta \left(\omega'_y + \frac{\eta'}{\eta} \right) = T + i;$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$\xi' - \eta' + \xi \omega'_x - \eta \omega'_y = -2i.$$

Si l'élément linéaire $e^{\omega} dx dy$ convient à une surface de révolution, on peut faire

$$\omega = \varphi(x+y), \quad \omega'_x = \omega'_y = \varphi'.$$

L'équation du problème devient alors

$$(1) \quad (\xi - \eta) \varphi' + \xi' - \eta' + 2i = 0.$$

Égalons à zéro la dérivée seconde du premier membre prise par

rapport à x et à y ; nous trouvons

$$(2) \quad (\xi - \eta) \varphi''' + (\xi' - \eta') \varphi'' = 0.$$

Or la dérivée $\varphi'' = \omega''_{xy}$ doit être supposée différente de zéro (on n'écarte ainsi que les surfaces développables). On peut alors tirer $\xi' - \eta'$ de l'équation (2) et porter sa valeur dans l'équation (1), ce qui donne

$$(\xi - \eta) \left(\varphi' - \frac{\varphi'''}{\varphi''} \right) + 2i = 0.$$

En conséquence, la différence $\xi - \eta$ ne dépend que de $x + y$. Il suit de là que les deux dérivées ξ' et η' sont égales et de signes contraires

$$\xi' = -\eta' = \text{const.} = mi.$$

Intégrant et négligeant les constantes additives, nous avons

$$\xi = mi.x, \quad \eta = -mi.y.$$

L'équation (1) devient alors

$$\varphi' = -\frac{2(m+1)}{m(x+y)} = \frac{n}{x+y}.$$

On en déduit immédiatement $\omega = n \log(x+y)$, d'où l'élément linéaire cherché

$$ds^2 = (x+y)^n dx dy.$$

C'est le résultat obtenu par M. Lie (*Mathem. Annalen*, t. XX, p. 387) comme solution de ce problème : *Trouver les éléments linéaires de toutes les surfaces dont les lignes géodésiques admettent plusieurs transformations infinitésimales conformes*. D'après un théorème de M. Weingarten, ces surfaces sont les lieux des centres de courbure de celles dont les rayons principaux sont dans le rapport constant $-\frac{n}{2}$.

3. Si, au lieu de chercher les spirales applicables sur des surfaces de révolution, on veut déterminer la fonction T de la variable $x' + y' = t$ par la condition que les lignes d'égale courbure soient parallèles, on arrive à l'équation du second ordre

$$\frac{1}{T} \left[\left(\frac{T''}{T'} - T \right)^2 + 1 \right] = \text{const.} = 2a.$$

On peut obtenir son intégrale générale. Prenons, en effet,

pour variable indépendante T et posons

$$Z = T' - \frac{T^2}{2}, \quad p = \frac{dZ}{dT},$$

ce qui conduit à l'équation

$$p^2 = 2aZ + aT^2 - 1.$$

L'équation dérivée

$$p \frac{dp}{dT} - ap - aT = 0$$

est homogène et s'intègre par une quadrature. La détermination de T est donc ramenée aux quadratures. L'intégrale particulière

$$T = \frac{1}{q} \tan \frac{(q+1)t}{2q}, \quad \frac{q^2}{q+1} = a,$$

donne l'élément linéaire des spirales applicables sur les surfaces de révolution.

SÉANCE DU 13 AVRIL 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. Bioche : *Sur les développables qui passent par une courbe gauche.*

M. Kobb : *Théorème sur la variation d'une intégrale double.*

M. Fouret : *Théorème général sur le maximum ou le minimum d'une fonction symétrique de plusieurs variables dont la somme est constante.*

M. Carvallo : *Sur un nouveau mode d'exposition de la théorie des déterminants.*

M. d'Ocagne : *Principe général de la théorie des abaques.*

M. APPELL adresse la Communication suivante :

Sur des potentiels conjugués.

Dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire $x + yi$, la partie réelle u et le coefficient v de i de la fonction vérifient les deux équations fondamentales

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

qui donnent immédiatement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Ces deux fonctions u et v vérifient donc l'équation du potentiel logarithmique et sont associées ou conjuguées par les relations (1).

M. Picard, dans une Note récente (*Comptes rendus*, 5 avril 1891), a généralisé ce point de vue en considérant des systèmes de deux fonctions associées vérifiant des relations analogues à (1), avec des coefficients fonctions de x .

Je me propose ici d'indiquer sommairement des systèmes analogues à (1), pour le potentiel à trois et quatre variables.

Considérons quatre fonctions X, Y, Z, T de trois variables réelles x, y, z , vérifiant les relations

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0. \end{array} \right.$$

qui présentent une certaine symétrie, en ce sens que la fonction Z , par exemple, est liée à $X, -Y, -T$ comme T à Y, X, Z , etc.

On conclut immédiatement des équations (2) que l'on a

$$\Delta_2 X = 0, \quad \Delta_2 Y = 0, \quad \Delta_2 Z = 0, \quad \Delta_2 T = 0,$$

en posant

$$\Delta_2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

De plus, on peut choisir arbitrairement la fonction T vérifiant $\Delta_2 T = 0$; il existe toujours des fonctions X, Y, Z vérifiant les équations (2); il en existe même une infinité et l'on peut préciser le degré d'indétermination et exprimer ces fonctions par des intégrales définies. Il suffit pour cela d'employer la démonstration que Beltrami a donnée pour un théorème de Stokes.

Le système (2) est un cas particulier du suivant, où figurent

quatre fonctions X, Y, Z, T de quatre variables x, y, z, t ,

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Y}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \end{array} \right.$$

et dans lequel chaque fonction vérifie nécessairement l'équation à quatre termes

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0.$$

Je me propose d'indiquer prochainement d'une façon plus détaillée les propriétés de ces potentiels associés, en me plaçant surtout au même point de vue que dans des recherches antérieures (*Acta mathematica*, t. 4).

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Mémoire sur les surfaces gauches rationnelles ;

par M. GENTY.

I. Les équations d'une droite, en coordonnées rectangulaires, étant

$$\frac{x - x_1}{u} = \frac{y - y_1}{v} = \frac{z - z_1}{w},$$

la droite est entièrement déterminée par les six quantités

$$u, \quad v, \quad w, \\ \xi = wy_1 - vz_1, \quad \eta = uz_1 - wx_1, \quad \zeta = vx_1 - uy_1,$$

que nous appellerons les *coordonnées homogènes* de la droite et qui sont liées entre elles par la relation identique

$$(1) \quad u\xi + v\eta + w\zeta = 0.$$

Dans une Note insérée aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3^e série, t. VI, p. 401, nous avons déjà donné la définition

de ces coordonnées et nous en avons fait une application à l'étude du complexe de Reye; le but du présent Mémoire est de montrer combien leur emploi facilite l'étude des surfaces gauches rationnelles.

Mais, avant d'aborder cette étude, nous allons rappeler quelques formules de la Note précitée et en donner quelques autres qui seront utiles par la suite.

2. La plus courte distance de deux droites, $(u \dots)$ et $(u_1 \dots)$, a pour expression

$$\delta = \frac{\Sigma(u\xi_1 + u_1\xi)}{\sqrt{\Sigma(vw_1 - v_1w)^2}},$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}\Sigma(u\xi_1 + u_1\xi) &= u\xi_1 + v\eta_1 + w\zeta_1 + u_1\xi + v_1\eta + w_1\zeta, \\ \Sigma(vw_1 - v_1w)^2 &= (vw_1 - v_1w)^2 + (wu_1 - w_1u)^2 + (wv_1 - v_1v)^2.\end{aligned}$$

Si les deux droites sont infiniment voisines et si l'on pose

$$u_1 = u + du, \quad v_1 = v + dv, \quad \dots,$$

il vient

$$(2) \quad \delta = \frac{\Sigma du d\xi}{\sqrt{\Sigma(v dw - w dv)^2}};$$

si $d\varepsilon$ est l'angle infiniment petit des deux droites, on a

$$(3) \quad d\varepsilon = \frac{\sqrt{\Sigma(v dw - w dv)^2}}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

La condition pour que les deux droites se rencontrent devient

$$(4) \quad \Sigma du d\xi = 0,$$

et leur point d'intersection a pour coordonnées

$$(5) \quad x = \frac{\eta d\xi - \xi d\eta}{\Sigma \xi du}, \quad y = \frac{\xi d\xi - \xi d\xi}{\Sigma \xi du}, \quad z = \frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{\Sigma \xi du}.$$

La perpendiculaire commune aux deux droites a pour coordonnées

$$(6) \quad \begin{cases} (v dw - w dv) \Sigma(v dw - w dv)^2, \\ (w du - u dw) \Sigma(v dw - w dv)^2, \\ (u dv - v du) \Sigma(v dw - w dv)^2, \\ P(u \Sigma u du - du \Sigma u^2) - Q(u \Sigma du^2 - du \Sigma u du), \\ P(v \Sigma u du - dv \Sigma u^2) - Q(v \Sigma du^2 - dv \Sigma u du), \\ P(w \Sigma u du - dw \Sigma u^2) - Q(w \Sigma du^2 - dw \Sigma u du). \end{cases}$$

coordonnées des fonctions entières d'ordre n d'une variable arbitraire t .

*Nombre des conditions nécessaires pour déterminer
une surface C_n .*

4. Les expressions des coordonnées de l'une quelconque de ses génératrices contiennent $6n + 6$ coefficients indéterminés, liés entre eux par les $2n + 1$ relations (11).

D'un autre côté, on peut remplacer t par une autre variable τ , qui lui soit liée par une équation de la forme

$$at\tau + bt + c\tau + d = 0,$$

et l'on peut disposer des coefficients arbitraires a , b , c et d pour déterminer à volonté quatre des coefficients des expressions (11). Il ne reste donc que

$$6n + 6 - (2n + 1) - 4 = 4n + 1$$

coefficients indéterminés; tel est par suite le nombre des conditions nécessaires pour déterminer une surface C_n .

Ce qui précède montre d'ailleurs qu'on peut choisir à volonté les valeurs de la variable auxquelles correspondent trois génératrices de la surface.

Une génératrice donnée de la surface gauche équivaut évidemment à trois conditions

Une directrice rectiligne donnée équivaut à $n + 1$ conditions. En effet, si $u_1, \dots$ sont les coordonnées de cette directrice, on aura, quel que soit t ,

$$\Sigma(u\xi_1 + u_1\xi) = 0,$$

ce qui fournit les $n + 1$ conditions

$$(13) \quad \Sigma(a_0\xi_1 + u_1x_0) = 0, \quad \dots$$

Si la directrice rectiligne n'est pas donnée, ses coordonnées dépendent de quatre coefficients qu'on pourra éliminer, pour $n > 3$, entre les $n + 1$ équations qui précèdent, et il restera $n - 3$ équations de condition entre les coefficients de la surface gauche; $3n + 4$ conditions nouvelles suffiront pour la déterminer.

Pour $n = 3$, on a quatre équations de condition qui permettent de déterminer les coordonnées de la directrice. Ces quatre équations

tions représentent des complexes linéaires ayant deux droites communes. Donc une surface C_3 a en général deux directrices rectilignes.

Enfin, pour $n = 2$, les équations (13) sont au nombre de trois et ne suffisent pas pour déterminer $u_1, v_1, \dots$. Ainsi une surface réglée du deuxième ordre a un nombre infini de directrices rectilignes.

Revenons au cas général, et supposons que la directrice rectiligne donnée soit l'axe des x . On aura $\xi = 0$ pour toute valeur de t , d'où

$$\eta = -w\varphi(t), \quad \zeta = v\varphi(t).$$

A chaque valeur de t correspond une génératrice rencontrant la directrice en un point dont l'abscisse est $\varphi(t)$. Et réciproquement, par un point situé sur l'axe des x à la distance ρ de l'origine passent toutes les génératrices correspondant aux valeurs de t fournies par l'équation

$$\varphi(t) = \rho.$$

Si donc la directrice donnée est une droite simple de la surface, on a nécessairement

$$\varphi(t) = \frac{at+b}{ct+d},$$

et, par suite, le rapport anharmonique des points de rencontre de la directrice avec quatre génératrices quelconques de la surface est égal à celui des valeurs de t auxquelles ces génératrices correspondent.

On a d'ailleurs pour les coordonnées $u, \dots$ des expressions de la forme

$$\begin{aligned} u &= f_1(t), & v &= (ct+d)f_2(t), & w &= (ct+d)f_3(t), \\ \xi &= 0, & \eta &= -(at+b)f_3(t), & \zeta &= (at+b)f_2(t), \end{aligned}$$

où f_2 et f_3 sont des fonctions d'ordre $n-1$ au plus.

Si l'axe des x était une directrice double, on trouverait de même, pour les coordonnées d'une génératrice, les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} u &= F_1(t), & v &= (dt^2+et+f)f_2(t), & w &= (dt^2+et+f)f_3(t), \\ \xi &= 0, & \eta &= -(at^2+bt+c)f_3(t), & \zeta &= (at^2+bt+c)f_2(t), \end{aligned}$$

f_2 et f_3 étant d'ordre $n-2$, et ainsi de suite.

On reconnaît facilement d'ailleurs que, quel que soit l'ordre de multiplicité de la directrice, les expressions de $u, \dots$ contiennent réellement $3n$ coefficients indéterminés.

Si la directrice rectiligne est située tout entière à l'infini, la surface a un plan directeur.

On a, dans ce cas, $u_1 = v_1 = w_1 = 0$, et les équations (13) deviennent

$$\Sigma a_0 \xi_1 = 0, \quad \dots,$$

En éliminant ξ_1, η_1 et ζ_1 entre ces équations, il restera $n - 1$ relations indépendantes entre les coefficients de la surface gauche. Par conséquent, le nombre des conditions nécessaires pour déterminer une surface C_n à plan directeur est égal à

$$4n + 1 - (n - 1) = 3n + 2.$$

On verrait d'ailleurs très simplement que, si le plan directeur est le plan des yz , et si la droite située à l'infini dans ce plan est une droite multiple d'ordre p de la surface, les coordonnées de C_n ont des expressions de la forme

$$\begin{aligned} u &= 0, & v &= -f(t)\psi(t), & w &= f(t)\varphi(t), \\ \xi &= F_1(t), & \eta &= f_1(t)\varphi(t), & \zeta &= f_1(t)\psi(t). \end{aligned}$$

F étant au plus d'ordre n , φ et ψ d'ordre p , et f et f_1 d'ordre $n - p$ par rapport à t .

Si enfin une surface C_n a deux directrices rectilignes, l'une Ox , l'autre située à l'infini dans le plan des yz , et telles que la première soit sur la surface une droite multiple d'ordre p , et la seconde une droite multiple d'ordre q , les coordonnées d'une génératrice de la surface auront des expressions de la forme

$$\begin{aligned} u &= 0, & v &= f(t)\varphi(t), & w &= f(t)\psi(t), \\ \xi &= 0, & \eta &= -f_1(t)\psi(t), & \zeta &= f_1(t)\varphi(t); \end{aligned}$$

φ et ψ sont des fonctions d'ordre q ; f et f_1 des fonctions d'ordre p , et l'on a, comme cela doit être,

$$p + q = n.$$

3. Comme application, cherchons les équations d'une surface

réglée du second ordre déterminée par trois de ses génératrices $(u_1, \dots), (u_2, \dots), (u_3, \dots)$.

On aura évidemment pour $u, \dots$ des expressions de la forme

$$u = \frac{a_1 u_1}{t - t_1} + \frac{a_2 u_2}{t - t_2} + \frac{a_3 u_3}{t - t_3}, \quad \dots,$$

t_1, t_2, t_3 étant les valeurs de la variable choisies à volonté qui correspondent aux trois génératrices données; nous déterminerons les coefficients a_1, a_2, a_3 en exprimant que la condition (1) est satisfaite pour toute valeur de t .

Cette condition étant déjà remplie pour trois valeurs de la variable, il suffit d'exprimer qu'elle l'est encore pour deux autres valeurs quelconques, par exemple pour $t = 0$ et $t = \infty$.

On obtient ainsi les deux équations

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{A t_1}{a_1} + \frac{B t_2}{a_2} + \frac{C t_3}{a_3} = 0, \\ \frac{A}{a_1} + \frac{B}{b_1} + \frac{C}{c_1} = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$A = \Sigma (u_2 \xi_3 + u_3 \xi_2),$$

$$B = \Sigma (u_3 \xi_1 + u_1 \xi_3),$$

$$C = \Sigma (u_1 \xi_2 + u_2 \xi_1).$$

Des équations (14) on tire

$$a_1 : a_2 : a_3 = \frac{A}{t_2 - t_3} : \frac{B}{t_3 - t_1} : \frac{C}{t_1 - t_2}.$$

On a donc enfin

$$u = \frac{A u_1}{(t_2 - t_3)(t - t_1)} + \frac{B u_2}{(t_3 - t_1)(t - t_2)} + \frac{C u_3}{(t_1 - t_2)(t - t_3)}, \quad \dots$$

Pour $t_1 = \infty, t_2 = 0$ et $t_3 = 1$, les expressions de $u, \dots$ prennent la forme plus simple

$$(15) \quad u = A u_1 - \frac{B u_2}{t} + \frac{C u_3}{t - 1}, \quad \dots$$

Les résultats qui précèdent permettent d'obtenir très simplement les conditions qui expriment que quatre droites ne se rencontrant pas deux à deux sont situées sur un même hyperboloïde.

Soient $(u_1 \dots), (u_2 \dots), (u_3 \dots)$ et $(u_4 \dots)$ les quatre droites

données, et posons dès maintenant

$$\begin{aligned} \Sigma(u_1 \xi_1 + u_4 \xi_1) &= D, & \Sigma(u_2 \xi_1 + u_4 \xi_2) &= E, & \Sigma(u_3 \xi_1 + u_4 \xi_3) &= F: \\ (u_2, v_3, w_4) &= U_1, & (u_3, v_1, w_4) &= U_2, & (u_1, v_2, w_1) &= U_3, \\ & & (u_1, v_2, w_3) &= U_4. \end{aligned}$$

Les équations (15) représentant les coordonnées d'une génératrice quelconque de l'hyperboloïde déterminé par les trois premières droites, on devra pouvoir poser

$$(16) \quad \begin{cases} su_4 = A u_1 - \frac{B u_2}{t} + \frac{C u_3}{t-1}, \\ sv_4 = A v_1 - \frac{B v_2}{t} + \frac{C v_3}{t-1}, \\ sw_4 = A w_1 - \frac{B w_2}{t} + \frac{C w_3}{t-1}, \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} s\xi_4 = A \xi_1 - \frac{B \xi_2}{t} + \frac{C \xi_3}{t-1}, \\ s\eta_4 = A \eta_1 - \frac{B \eta_2}{t} + \frac{C \eta_3}{t-1}, \\ s\zeta_4 = A \zeta_1 - \frac{B \zeta_2}{t} + \frac{C \zeta_3}{t-1}, \end{cases}$$

s et t étant deux coefficients inconnus. Or on a

$$\begin{aligned} u_4 U_4 &= u_1 U_1 + u_2 U_2 + u_3 U_3, \\ v_4 U_4 &= v_1 U_1 + v_2 U_2 + v_3 U_3, \\ w_4 U_4 &= w_1 U_1 + w_2 U_2 + w_3 U_3. \end{aligned}$$

En comparant ces équations avec les équations (16), il vient

$$(18) \quad \frac{A}{s} = \frac{U_1}{U_4}, \quad \frac{B}{st} = -\frac{U_2}{U_4}, \quad \frac{C}{s(t-1)} = \frac{U_3}{U_4},$$

et, si l'on élimine s et t entre ces équations, on a

$$(19) \quad A U_2 U_3 + B U_3 U_1 + C U_1 U_2 = 0 :$$

c'est l'une des conditions cherchées.

Si maintenant nous additionnons les équations (16) et (17) après avoir multiplié les trois premières par ξ_1, η_1, ζ_1 et les trois

autres par u_1, v_1, w_1 respectivement, il vient

$$st(t-1)D = BC :$$

remplaçant dans cette équation st et $t-1$ par leurs valeurs tirées des équations (18), et tenant compte de l'équation (19), on a

$$AU_2U_3 + DU_1U_4 = 0.$$

On trouverait de même

$$BU_3U_1 + EU_2U_4 = 0,$$

$$CU_1U_2 + FU_3U_4 = 0.$$

Les trois équations qui précèdent se réduisent d'ailleurs à deux en vertu de l'identité

$$AU_2U_3 + BU_3U_1 + CU_1U_2 = DU_1U_4 + EU_2U_4 + FU_3U_4.$$

6. Cherchons encore l'expression générale d'une cubique réglée dont on donne quatre génératrices.

Soient $\alpha, 0, 1$ et τ les valeurs de la variable qui correspondent aux quatre génératrices données. On aura pour $u, \dots$ des expressions de la forme

$$(20) \quad u = au_1 + \frac{bu_2}{t} + \frac{cu_3}{t-1} + \frac{du_4}{t-\tau}, \quad \dots$$

Ces équations renferment quatre coefficients indéterminés; mais il existe entre eux trois relations que nous obtiendrons en exprimant que l'équation (1) est satisfaite identiquement. Or cette équation est du sixième ordre et elle est déjà satisfaite par les quatre valeurs $\alpha, 0, 1$ et τ de la variable; pour qu'elle soit identique, il suffit qu'elle le soit encore pour trois autres valeurs de la variable.

Mais, si l'équation (1) est satisfaite identiquement, il en sera de même de sa dérivée

$$(21) \quad \Sigma(u\xi' + u'\xi) = 0$$

et réciproquement; si l'équation (21) est identique, l'expression $\Sigma u\xi$ sera constante et, comme elle est nulle pour quatre valeurs de t , elle sera identiquement nulle. En exprimant que l'équation (21) est satisfaite pour les valeurs $\alpha, 0$ et 1 de la variable, nous obten-

nous sans peine les conditions suivantes :

$$(22) \quad \begin{cases} bC + cB + dD = 0, \\ cA + \frac{dE}{\tau} = 0, \\ bA + \frac{dF}{1-\tau} = 0. \end{cases}$$

Si l'on ajoute ces équations après les avoir multipliées respectivement par A, B et C, il vient

$$(23) \quad AD\tau^2 - (AD + BE + CF)\tau + BE = 0.$$

Il est facile d'interpréter cette équation. En effet, τ est le rapport anharmonique des quatre valeurs ∞ , 0, 1 et τ de la variable. D'ailleurs la surface cherchée a deux directrices rectilignes, qui sont les droites Δ et Δ' , rencontrant les quatre droites données; l'une est une directrice simple, l'autre une directrice double. Or nous avons vu que, lorsqu'une surface C_n a une directrice simple, le rapport anharmonique des points où quatre génératrices rencontrent cette directrice est égal à celui des valeurs de t auxquelles elles correspondent. L'équation (23) a donc pour racines les rapports anharmoniques des points où les quatre droites données sont rencontrées par Δ et Δ' respectivement. Si l'on adopte la valeur τ , Δ sera la directrice simple de la surface et Δ' la directrice double, et inversement.

Si deux des droites données se rencontrent, la directrice double est déterminée et l'équation (23) se réduit au premier degré.

Dans le cas général, les équations (22) montrent qu'on peut prendre

$$d = -A, \quad c = \frac{E}{\tau}, \quad b = \frac{F}{1-\tau},$$

et les expressions des coordonnées prennent la forme

$$u = au_1 + \frac{Fu_2}{1-\tau} + \frac{Eu_3}{\tau(1-\tau)} - \frac{Au_4}{1-\tau}, \quad \dots,$$

où l'on doit remplacer τ par l'une des racines de l'équation (23); elles ne renferment plus qu'un seul coefficient arbitraire a .

Remarquons encore que, si l'équation (23) a ses deux racines

égales, c'est-à-dire si l'on a

$$A^2 D^2 + B^2 E^2 + C^2 F^2 - 2 B C E F - 2 C A F D - 2 A B D E = 0.$$

il n'y aura qu'une droite Δ rencontrant les quatre droites données et, dans ce cas, l'une quelconque des quatre droites est tangente à l'hyperboloïde déterminé par les trois autres.

La condition qui précède peut encore s'écrire sous la forme bien connue

$$\begin{vmatrix} 0 & C & B & D \\ C & 0 & A & E \\ B & A & 0 & F \\ D & E & F & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

7. *Courbe double d'une surface* C_n . — Nous avons vu que la section plane d'une surface C_n est une courbe unicursale d'ordre n , ayant par suite $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles. La surface a donc une courbe double d'ordre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, dont nous allons chercher les équations.

Soient $(u_s...)$, $(u_t...)$ deux génératrices qui se rencontrent, s et t les valeurs correspondantes de la variable. On a

$$(21) \quad \Sigma(u_s \xi_t + u_t \xi_s) = 0.$$

Le premier membre de cette équation, ainsi que sa dérivée par rapport à t , s'annule pour $t = s$; en supprimant ce facteur, l'équation n'est plus que d'ordre $n - 2$ par rapport à t et s , ce qui montre qu'une génératrice d'une surface C_n en rencontre $n - 2$ autres.

La courbe double a d'ailleurs pour équations

$$x = \frac{\xi_t \xi_s - \xi_s \xi_t}{\Sigma u_s \xi_t}, \quad y = \frac{\xi_t \xi_s - \xi_s \xi_t}{\Sigma u_s \xi_t}, \quad z = \frac{\xi_t \xi_s - \xi_s \xi_t}{\Sigma u_s \xi_t},$$

s et t étant deux variables arbitraires liées entre elles par l'équation

$$\frac{\Sigma(u_s \xi_t + u_t \xi_s)}{(t-s)^2} = 0.$$

On démontrerait sans difficulté que l'ordre de cette courbe est bien égal à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. (A suivre.)

8. *Génératrices singulières d'une surface* C_n . — Nous avons trouvé pour l'expression de la plus courte distance de deux droites infiniment voisines

$$\delta = \frac{\Sigma du dz}{\sqrt{\Sigma (v dv - w dw)^2}}.$$

Si ces deux droites sont les génératrices d'une surface C_n , il vient

$$\delta = \frac{\Sigma u' z'}{\sqrt{\Sigma (v w' - w v')^2}}.$$

Les génératrices singulières de la surface sont donc fournies par l'équation

$$(25) \quad \Sigma u' z' = 0.$$

Cette équation est d'ordre $2(n-2)$; on a, en effet,

$$\begin{aligned} \Sigma u z &= 0, \\ \Sigma (u' z + u z') &= 0 \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\Sigma (n u - t u') (n t - t z') = t^2 \Sigma u' z'.$$

Or le premier membre de cette équation est d'ordre $2(n-1)$, donc $\Sigma u' z'$ est d'ordre $2(n-2)$; tel est, par suite, le nombre des génératrices singulières de la surface.

Si l'équation (25) est satisfaite identiquement, la surface C_n est développable. Cette équation étant d'ordre $2(n-2)$, la condition d'identité fournit $2n-3$ relations, en sorte qu'il faut

$$4n+1-(2n-3) = 2(n+2)$$

conditions pour déterminer une surface développable rationnelle d'ordre n .

9. *Point central, ligne de striction, plan central et paramètre de distribution des plans tangents d'une surface* C_n . — En appliquant au cas de deux génératrices infiniment voisines de la surface C_n les formules du § 2. et en posant

$$P = \begin{vmatrix} z' & r' & s' \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} z & r & s \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix},$$

$$p^2 = \Sigma (v w' - w v')^2,$$

on a pour les coordonnées du point central de la génératrice

$$(26) \quad \begin{cases} x = \frac{Pu - Q u' + (v v' - w w') \Sigma \xi u'}{p^2}, \\ y = \frac{Pv - Q v' + (w u' - u w') \Sigma \xi u'}{p^2}, \\ z = \frac{Pw - Q w' + (u v' - v u') \Sigma \xi u'}{p^2}. \end{cases}$$

Le numérateur et le dénominateur des expressions (26) sont d'ordre $4(n-1)$; tel est, par suite, l'ordre de la ligne de striction de la surface C_n . Ces expressions peuvent, d'ailleurs, se mettre sous la forme

$$(27) \quad x = \frac{(\eta_1 \xi' - \xi \eta_1')}{\Sigma \xi u'} + \frac{u \Sigma u' \xi'}{p^2 \Sigma \xi u'} \quad \dots,$$

et il est facile de voir que le point qui a pour coordonnées

$$x = \frac{(\eta_1 \xi' - \xi \eta_1')}{\Sigma \xi u'}, \quad \dots$$

est le point de contact de la génératrice (u) avec le plan mené par cette ligne et l'origine, c'est-à-dire le point correspondant de la courbe de contact avec C_n du cône circonscrit à cette surface et ayant son sommet à l'origine. Cette courbe est donc unicursale et d'ordre $2(n-1)$.

Dans le cas d'une génératrice singulière, on a

$$\Sigma u' \xi' = 0,$$

et le point central se confond avec le point d'intersection de cette génératrice et de la génératrice infiniment voisine.

Si la surface C_n a un plan directeur, quel que soit d'ailleurs l'ordre de multiplicité de la directrice située dans ce plan, l'ordre de la ligne de striction diminue de moitié.

On a en effet, dans ce cas, le plan directeur étant le plan des yz ,

$$\begin{aligned} u &= 0, & v &= -f(t)\psi(t), & w &= f(t)\varphi(t), \\ \xi &= F, & \eta &= f_1(t)\varphi(t), & \xi &= f_1(t)\psi(t), \end{aligned}$$

où φ et ψ sont des fonctions d'ordre 2, f et f_1 des fonctions d'ordre

$u = \mu$ en t , et l'on trouve aisément pour les coordonnées du point central

$$\begin{aligned} x &= \frac{F'u - F u' - f f_1(\varphi_1' \psi' - \varphi' \psi_1)}{f^2(\varphi_1' \psi' - \varphi' \psi_1)}, \\ y &= \frac{F'v - F v'}{f^2(\varphi_1' \psi' - \varphi' \psi_1)}, \\ z &= \frac{F'w - F w'}{f^2(\varphi_1' \psi' - \varphi' \psi_1)}; \end{aligned}$$

le dénominateur et les numérateurs de ces expressions ne sont plus que d'ordre $2(n-1)$.

Ainsi la ligne de striction d'un parabolôïde hyperbolique pour l'un des systèmes de génératrices est une conique : la forme même des expressions de x, y et z montre que cette conique est une parabole.

Le plan central relatif à la génératrice $(u \dots)$ a pour équation

$$(28) \quad (ux + vy + wz)\Sigma uu' - (u'x + v'y + w'z)\Sigma u^2 = Q;$$

il enveloppe une développable dont la classe est égale à $2n-2$.

Enfin le paramètre de distribution des plans tangents le long de la génératrice $(u \dots)$ a pour expression

$$(29) \quad k = \frac{\Sigma u^2 \Sigma u' \xi'}{p^2}.$$

Comme exemple, cherchons le paramètre de distribution des plans tangents le long de la génératrice $(u_2 \dots)$ de l'hyperboloïde représenté par les équations (15) du § 3, et, pour simplifier, supposons que le centre de la surface soit à l'origine, ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \Sigma u_2 \xi_3 &= \Sigma u_3 \xi_2, \\ \Sigma u_3 \xi_1 &= \Sigma u_1 \xi_3, \\ \Sigma u_1 \xi_2 &= \Sigma u_2 \xi_1. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} u &= A t(t-1)u_1 - B(t-1)u_2 + C t u_3, & \dots, \\ u' &= A(2t-1)u_1 - B u_2 & + C u_3, & \dots, \end{aligned}$$

et pour $t=0$

$$\begin{aligned} u &= u_3, & v &= v_2, & w &= w_2, \\ u' &= C u_3 - A u_1 - B u_2, & \dots \end{aligned}$$

On tire de là

$$\Sigma u^2 = u_2^2 + v_2^2 + w_2^2, \\ \Sigma u' \xi' = -ABC.$$

$$\begin{aligned} v w' - v' w &= A(v_2 v_1 - v_2 w_1) + C(v_2 w_3 - v_3 w_2) \\ &= 2(u_3 \xi_2 + v_3 \gamma_2 + w_3 \xi_2)(v_1 w_2 - v_2 w_1) \\ &\quad + 2(u_1 \xi_2 + v_1 \gamma_2 + w_1 \xi_2)(v_2 w_3 - v_3 w_2) \\ &= 2 \xi_2 [u_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_3(v_1 w_2 - v_2 w_1)] \\ &\quad + 2(\gamma_2 v_2 + \xi_2 w_2)(v_1 w_3 - v_3 w_1) = 2 \Delta \xi_2, \end{aligned}$$

en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

d'où

$$\varphi^2 = 4 \Delta^2 (\xi_2^2 + \gamma_2^2 + \xi_2^2);$$

on a donc enfin

$$k = - \frac{ABC}{4 \Delta^2} \frac{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}{\xi_2^2 + \gamma_2^2 + \xi_2^2} = \frac{V}{2 \varphi^2},$$

en appelant V le volume du parallélépipède déterminé par les trois droites $(u_1 \dots)$, $(u_2 \dots)$ et $(u_3 \dots)$ et φ la distance de l'origine à la génératrice $(u_2 \dots)$. On sait d'ailleurs que le parallélépipède construit sur trois génératrices quelconques d'un hyperboloïde a un volume constant ⁽¹⁾. Donc, si k est le paramètre de distribution des plans tangents pour une génératrice quelconque d'un hyperboloïde, φ la distance du centre à cette génératrice, le produit $k \varphi^2$ est constant.

10. *Plan tangent, parabolôïde des normales.* — Un point quelconque d'une surface gauche C_n ayant pour coordonnées

$$x = \frac{v \xi - w \gamma}{\Sigma u^2} + su, \quad y = \dots, \quad z = \dots,$$

ces équations seront celles de la surface gauche elle-même, si l'on y regarde s et t comme deux variables indépendantes. Les quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ seront proportionnelles aux cosinus directeurs d'une tangente à la surface et le plan tangent en un point quelconque sera ainsi complètement déterminé.

(1) Ce théorème n'était pas connu quand nous l'avons énoncé dans les *Nouvelles Annales*, 3^e série, t. IV, p. 248.

Soit l'axe des z une génératrice de la surface, on a pour les coordonnées de cette droite

$$u = v = 0, \quad w = 1, \quad \xi = \tau_i = \zeta = 0.$$

La condition $\Sigma(u\xi' + u'\xi) = 0$ donne alors $\xi' = 0$, et les coordonnées de la génératrice infiniment voisine sont

$$u' dt, \quad v' dt, \quad 1 + w' dt, \quad \xi' dt, \quad \tau_i' dt, \quad 0.$$

Ceci posé, le plan $z = s$ mené par un point A de l'axe des z parallèlement au plan des xy rencontre cette génératrice infiniment voisine en un point B ayant pour coordonnées

$$x = \frac{-\tau_i' + su'}{1 + w' dt} dt, \quad y = \frac{\xi' + sv'}{1 + w' dt} dt, \quad z = s.$$

La normale à la surface gauche au point A est perpendiculaire à Oz et à AB; donc ses cosinus directeurs sont proportionnels aux quantités $\xi' + sv'$, $\tau_i' - su'$ et 0, et elle a elle-même pour coordonnées

$$\begin{aligned} u_N &= \xi' + sv', & v_N &= \tau_i' - su', & w_N &= 0, \\ \xi_N &= s^2 u' - s \tau_i', & \tau_{iN} &= s \xi' + s^2 v', & \zeta_N &= 0. \end{aligned}$$

Si dans ces équations on regarde t comme une constante, s variant seul, elles représentent le parabolôïde des normales le long de la génératrice Oz.

Dans l'hypothèse actuelle, on a

$$P = u' \tau_i' - v' \xi', \quad Q = 0, \quad \Sigma u' \xi = 0, \quad \rho^2 = u'^2 + v'^2;$$

on a alors pour les coordonnées du point central de Oz

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{(u' \tau_i' - v' \xi') u}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}.$$

Si donc on suppose en outre que le point central a été pris pour origine, on a

$$(30) \quad u' \tau_i' - v' \xi' = 0;$$

on a alors pour le paramètre de distribution des plans tangents

$$k = \frac{u' \xi' + v' \tau_i'}{u'^2 + v'^2} = \frac{\sqrt{\xi'^2 + \tau_i'^2}}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}.$$

Si d'ailleurs nous appelons θ l'angle de la normale au point A

avec la normale à l'origine, nous aurons

$$\cos \theta = \frac{\xi'(\xi' + sv') + \tau'_i(\tau'_i - su')}{\sqrt{\xi'^2 + \tau_i'^2} \sqrt{(\xi' + sv')^2 + (\tau'_i - su')^2}} = \frac{\sqrt{\xi'^2 + \tau_i'^2}}{\sqrt{\xi'^2 + \tau_i'^2 + s^2(u'^2 + v'^2)}}.$$

et par suite

$$\tan \theta = s \frac{\sqrt{u'^2 + v'^2}}{\sqrt{\xi'^2 + \tau_i'^2}} = \frac{s}{k},$$

comme cela doit être.

Cherchons enfin le paramètre de distribution des plans tangents le long de la génératrice ($u_N \dots$) du paraboloïde des normales.

Si nous désignons par des accents les dérivées prises par rapport à s , nous aurons

$$\begin{aligned} u_N &= \xi' + sv', & v_N &= \tau'_i - su', & w_N &= 0, \\ \xi_N &= s^2 u' - s \tau'_i, & \tau_N &= s \xi' + s^2 v', & \xi_N &= 0, \\ u'_N &= v', & \tau'_N &= -u', & w'_N &= 0, \\ \xi'_N &= 2su' - \tau'_i, & \tau'_N &= \xi' + 2sv', & \xi'_N &= 0. \end{aligned}$$

$$\Sigma u_N^2 = \xi'^2 + \tau_i'^2 + s^2(u'^2 + v'^2),$$

$$\Sigma u'_N \xi'_N = (u' \xi' + v' \tau'_i),$$

$$p^2 = (u' \xi' + v' \tau'_i)^2,$$

et par suite

$$k_1 = \frac{\xi'^2 + \tau_i'^2 + s^2(u'^2 + v'^2)}{u' \xi' + v' \tau'_i} = \frac{\xi'^2 + \tau_i'^2}{\cos^2 \theta (u' \xi' + v' \tau'_i)} = \frac{k}{\cos^2 \theta},$$

expression bien connue.

11. *Hyperboloïde osculateur.* — Nous avons trouvé au § 8 pour les coordonnées d'un hyperboloïde déterminé par trois de ses génératrices ($u_1 \dots$), ($u_2 \dots$), ($u_3 \dots$) des expressions de la forme

$$u = \frac{A u_1}{(T_1 - T_2)(T - T_1)} + \frac{B u_2}{(T_3 - T_1)(T - T_2)} + \frac{C u_3}{(T_1 - T_2)(T - T_3)}, \dots$$

Si nous supposons que les trois droites données soient trois génératrices infiniment voisines de la surface gauche C_n , nous obtiendrons l'hyperboloïde osculateur de cette surface.

Posons donc

$$T_1 = t - \hat{\gamma} t, \quad T_2 = t, \quad T_3 = t + \hat{\gamma} t$$

On aura

$$\begin{aligned} u_1 &= u - u' \delta t + u'' \frac{\delta t^2}{2}, & \dots, \\ u_2 &= u, & \dots, \\ u_3 &= u + u' \delta t + u'' \frac{\delta t^2}{2}, & \dots \end{aligned}$$

Si d'ailleurs on tient compte de l'équation $\Sigma u \xi = 0$ et de celles qu'on en déduit par des dérivations successives, on trouve, par des calculs faciles,

$$A = - \delta t^2 \Sigma u' \xi' - \frac{\delta t^3}{2} \Sigma (u' \xi'' + u'' \xi') - \frac{\delta t^4}{12} [2 \Sigma (u' \xi''' + u'' \xi'') + 3 \Sigma u'' \xi''] + \dots$$

$$B = - 4 \delta t^2 \Sigma u' \xi' - 2 \frac{\delta t^3}{3} \Sigma (u' \xi'' + u'' \xi') + \dots$$

$$C = - \delta t^2 \Sigma u' \xi' - \frac{\delta t^3}{2} \Sigma (u' \xi'' + u'' \xi') - \frac{\delta t^4}{12} [2 \Sigma (u' \xi''' + u'' \xi'') + 3 \Sigma u'' \xi''] + \dots$$

et l'on obtient, pour les coordonnées de l'hyperboloïde osculateur des expressions de la forme

$$u_h = \lambda u + 2 \mu (T - t) u' + 2 \nu (T - t)^2 u'', \quad \dots,$$

λ , μ et ν ayant les valeurs suivantes :

$$\lambda = 4 \Sigma u' \xi' - 2 (T - t) \Sigma (u' \xi'' + u'' \xi') + (T - t)^2 \Sigma u'' \xi'',$$

$$\mu = 2 \Sigma u' \xi' - (T - t) \Sigma (u' \xi'' + u'' \xi'),$$

$$\nu = \Sigma u' \xi'.$$

Si α , β et γ sont les coordonnées du centre de l'hyperboloïde osculateur, on trouve

$$(31) \quad \alpha = \frac{u \Sigma (u'' \xi' - u' \xi'') + u' \Sigma (u \xi'' - u'' \xi) + u'' \Sigma (u' \xi - u \xi')}{S}, \quad \dots,$$

en désignant par S le déterminant

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}.$$

Le dénominateur et les numérateurs des expressions (31) sont d'ordre $3(n-2)$. Donc le lieu des centres des hyperboloïdes osculateurs d'une surface gauche rationnelle d'ordre n est une courbe gauche unicursale d'ordre $3(n-2)$.

Les génératrices de la surface gauche pour lesquelles l'hyperboloïde osculateur se transforme en paraboloides sont données par

l'équation

$$S = 0;$$

elles sont donc au nombre de $3(n-2)$. Si cette équation est satisfaite identiquement, la surface est à plan directeur.

12. *Surfaces développables.* — Nous avons vu que la surface réglée est développable si l'on a, pour toute valeur de t ,

$$(32) \quad \Sigma u' \xi' = 0.$$

Il est facile de voir, d'après cela, qu'il n'y a pas de surface développable non conique de degré inférieur à 4.

Si l'on prend, en effet, les dérivées successives de l'équation

$$\Sigma u \xi = 0,$$

il vient

$$\Sigma (u' \xi + u \xi') = 0,$$

$$\Sigma (u \xi'' + u'' \xi + 2u' \xi') = 0.$$

$$\Sigma (u \xi''' + u''' \xi + 3u' \xi'' + 3u'' \xi') = 0.$$

Mais si l'on prend la dérivée par rapport à t de l'équation (32), il vient

$$\Sigma (u' \xi'' + u'' \xi') = 0.$$

On a dès lors

$$(33) \quad \begin{cases} \Sigma u \xi = 0, \\ \Sigma (u \xi' + u' \xi) = 0, \\ \Sigma (u \xi'' + u'' \xi) = 0, \\ \Sigma (u \xi''' + u''' \xi) = 0. \end{cases}$$

Ceci posé, soient $(u_s \dots)$, $(u_t \dots)$ deux génératrices d'une surface réglée; la condition pour qu'elles se rencontrent est

$$(34) \quad \Sigma (u_s \xi_t + u_t \xi_s) = 0.$$

Or le premier membre de cette équation et ses trois premières dérivées s'annulent pour $t = s$, en vertu des équations (33). Donc, si $u \dots$ sont d'ordre inférieur à 4, l'équation (4) est satisfaite identiquement, ce qui montre que deux génératrices quelconques de la surface réglée se rencontrent: cette surface est donc un plan ou un cône.

12. Soient maintenant $(u \dots)$ les coordonnées d'une génératrice quelconque d'une surface développable C_n .

Le point de l'arête de rebroussement situé sur cette génératrice a pour coordonnées (27)

$$(35) \quad x = \frac{\gamma_1 \gamma'_1 - \gamma'_1 \gamma_1}{\sum u' \xi}, \quad \dots$$

Le plan tangent le long de cette génératrice a de même pour équation

$$(36) \quad (vw' - v'w)x + (wu' - w'u)y + (uv' - u'v)z = \sum u' \xi.$$

Il est facile de voir que les numérateurs et le dénominateur des expressions (35) ont un facteur commun, et qu'il en est de même des deux membres de l'équation (36).

Considérons, en effet, les valeurs de t pour lesquelles on a $\sum u' \xi = 0$, sans qu'on ait en même temps

$$(37) \quad u : v : w = u' : v' : w'.$$

Des équations

$$\sum u \xi = 0, \quad \sum u' \xi = 0$$

on tire

$$\xi : \gamma_1 : \xi = (vw' - v'w) : (wu' - w'u) : (uv' - u'v).$$

Des équations

$$\sum \xi' u = 0, \quad \sum \xi' u' = 0$$

on tire de même

$$\xi' : \gamma'_1 : \xi' = (vw' - v'w) : (wu' - w'u) : (uv' - u'v) = \xi : \gamma_1 : \xi.$$

Donc les valeurs de t considérées annulent les numérateurs des expressions (35).

On verrait de même que les valeurs de t qui annulent $\sum u' \xi$, sans qu'on ait en même temps

$$(38) \quad \xi : \gamma_1 : \xi = \xi' : \gamma'_1 : \xi',$$

annulent le premier membre de l'équation (36).

Or les valeurs de t pour lesquelles les équations (37) sont satisfaites correspondent aux points de l'arête de rebroussement situés à l'infini. De même les valeurs de t qui satisfont aux équations (38) correspondent aux plans tangents de la surface C_n qui passent par l'origine. Si donc nous appelons m l'ordre de l'arête de rebroussement et c la classe de la surface développable, les numérateurs et les dénominateurs des expressions (35) ont un facteur commun d'ordre c , et les deux termes de l'équation (36) un facteur com-

mun d'ordre m . D'ailleurs $\Sigma n'\xi$ est d'ordre $2(n-1)$; donc on a

$$(39) \quad c + m = 2(n-1).$$

Soit maintenant r le nombre des points stationnaires de l'arête de rebroussement et s le nombre de ses plans stationnaires.

On obtiendra le nombre des points stationnaires en exprimant que trois génératrices infiniment voisines de la surface passent par un même point, ce qui donne

$$(40) \quad (\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

On obtiendra les plans osculateurs stationnaires en exprimant que trois génératrices infiniment voisines de la surface sont situées dans un même plan, sans passer par le même point, ce qui donne

$$(41) \quad (u, v, w) = 0.$$

Les équations (40) et (41) sont d'ordre $3(n-2)$ en t ; mais des solutions de l'équation (40) il faut retrancher celles des équations (38), qui sont évidemment étrangères.

De même, des solutions de l'équation (41), il faut retrancher celles de l'équation (37).

D'ailleurs ces solutions étrangères sont racines doubles des équations (40) et (41), car elles annulent les dérivées des premiers membres de ces équations. On a donc enfin

$$(42) \quad \begin{cases} r = 3(n-2) - 2c; \\ s = 3(n-2) - 2m. \end{cases}$$

Des équations (39) et (42) on déduit facilement

$$\begin{aligned} r &= 2m - n - 2, \\ s &= 2c - n - 2, \end{aligned}$$

et comme ces nombres r et s ne peuvent être négatifs, on a nécessairement

$$m \leq \frac{n+2}{2}, \quad c \leq \frac{n+2}{2}.$$

13. Les résultats qui précèdent nous permettent d'établir très simplement la classification bien connue des surfaces développables rationnelles, qui comprennent, ainsi que l'a démontré M. Schwarz, toutes celles des sept premiers ordres.

Développable du quatrième ordre : $n = 4$. On a

$$m + c = 6,$$

et les inégalités du § 42 démontrent qu'on doit prendre

$$m = 3, \quad c = 3,$$

d'où

$$r = s = 0.$$

Ainsi la développable du quatrième ordre est de la troisième classe et son arête de rebroussement est une cubique gauche qui n'a ni point de rebroussement, ni plan stationnaire.

Développable du cinquième ordre : $n = 5$. On a

$$m + c = 8,$$

et les inégalités

$$m \geq \frac{7}{2}, \quad c \geq \frac{7}{2}$$

obligent à prendre

$$m = c = 4,$$

d'où

$$r = s = 1.$$

La développable du cinquième ordre est donc de la quatrième classe et elle a pour arête de rebroussement une quartique gauche ayant un point de rebroussement et un plan stationnaire.

Développable du sixième ordre : $n = 6$. On a

$$m + c = 10, \quad m \geq 4, \quad c \geq 4.$$

Il y a trois cas à considérer :

$$1^{\circ} \quad m = 4, \quad c = 6,$$

d'où

$$r = 0, \quad s = 4.$$

La développable est de la sixième classe et elle est osculatrice à une quartique gauche unicursale ayant quatre plans stationnaires et pas de point de rebroussement.

$$2^{\circ} \quad m = 5, \quad c = 5,$$

d'où

$$r = s = 2.$$

La développable est de la cinquième classe et elle a pour arête

de rebroussement une quintique ayant deux points de rebroussement et deux plans stationnaires.

$$3^{\circ} \qquad m = 6, \quad c = 4,$$

d'où

$$r = 4, \quad s = 0.$$

Ce cas est réciproque du premier; la développable est de la quatrième classe et elle a pour arête de rebroussement une sextique gauche ayant quatre points de rebroussement et pas de plan stationnaire.

Développables du septième ordre : $n = 7$. On a

$$m + c = 12,$$

$$m \geq \frac{9}{2}, \quad c \geq \frac{9}{2}.$$

On obtient trois surfaces distinctes :

$$1^{\circ} \qquad m = 5, \quad c = 7,$$

d'où

$$r = 1, \quad s = 5.$$

La développable est de la septième classe et elle est osculatrice à une quintique gauche ayant un point de rebroussement et cinq plans stationnaires.

$$2^{\circ} \qquad m = 6, \quad c = 6,$$

d'où

$$r = s = 3.$$

La développable est de la sixième classe; son arête de rebroussement est une sextique gauche ayant trois points de rebroussement et trois plans stationnaires.

$$3^{\circ} \qquad m = 7, \quad c = 5,$$

d'où

$$r = 5, \quad s = 1.$$

Ce cas est corrélatif du premier.

La développable est de la cinquième classe; son arête de rebroussement est une courbe du septième ordre ayant cinq points de rebroussement et un seul plan stationnaire.

14. Nous ne pousserons pas plus loin cette énumération et nous nous bornerons à montrer comment les résultats qui précèdent permettent encore de déterminer un maximum pour le nombre des points de rebroussement d'une courbe gauche unicursale.

On a

$$r = 2m - n - 2,$$

d'où

$$n = 2m - 2 - r, \quad c = 2(n - 1) - m = 3m - 6 - 2r.$$

Or on a

$$c \geq \frac{n+2}{2},$$

ou, en remplaçant c et n par leurs valeurs,

$$6m - 12 - 4r \geq 2m - r,$$

d'où

$$r \leq \frac{4m - 12}{3}.$$

On obtient donc une valeur maximum de r en prenant le plus grand entier contenu dans $\frac{4m-12}{3}$. Ainsi une cubique gauche n'a pas de point de rebroussement, une quartique gauche en a un au plus, une quintique gauche deux au plus, etc.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 MAI 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. Lucien Lévy : *Sur le déplacement d'une figure de forme invariable.*

M. FÉLIX LUCAS fait la Communication suivante :

Sur les fonctions d'une variable imaginaire.

Soit $f(z)$ une fonction de la variable $z = x + yi$ et posons

$$(1) \quad f(z) = e^{V+Ui};$$

V sera le logarithme népérien du module de $f(z)$ et U l'argument de cette fonction.

On a identiquement

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

d'où

$$(3) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial x},$$

$$(4) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2.$$

On a aussi

$$(5) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0;$$

d'où

$$(6) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Par chaque point (x, y) du plan passe une *courbe équimodulaire* $V = \text{const.}$, à laquelle est normal le *vecteur modulaire*

$$\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2},$$

dont les deux projections sont $-V'_x$ et $-V'_y$.

Pareillement, on peut faire passer par le point (x, y) une *courbe équiargumentaire* $U = \text{const.}$, à laquelle est normal le *vecteur argumentaire*

$$\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2},$$

dont les deux projections sont $-U'_x$ et $-U'_y$.

Les équations (3) et (4) montrent que *le vecteur modulaire et le vecteur argumentaire pour un même point du plan sont égaux et perpendiculaires entre eux*. Si l'on fait tourner le second d'un angle égal à $\frac{\pi}{2}$ dans le sens du mouvement des aiguilles de la montre, il se superpose au premier.

Les équations (4) et (6) montrent que, *si l'une des fonctions V et U est une fonction de point, il en est de même de la seconde*. Supposons que cette condition soit remplie, nous pourrions regarder ces deux fonctions comme des *potentiels* et énoncer le théorème suivant :

Les courbes équiargumentaires sont les lignes de force correspondant aux courbes équi-modulaires considérées comme courbes de niveau. Et, réciproquement, les courbes équi-modulaires sont les lignes de force correspondant aux courbes équi-argumentaires considérées comme courbes de niveau.

D'après les équations (3), la force modulaire et la force argumentaire s'annulent simultanément. Appelons points neutres du plan les points sur lesquels ces forces s'annulent; ce sont aussi les points en lesquels les courbes de niveau et les lignes de force présentent des points nodaux.

On a identiquement

$$(7) \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\partial V}{\partial x} - i \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + i \frac{\partial U}{\partial x};$$

par conséquent, les points neutres du plan sont les points racines de l'équation qu'on obtient en égalant à zéro la dérivée logarithmique de la fonction $\varphi(z)$.

Posons

$$(8) \quad \begin{cases} V_1 = \log \text{nép.} \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} \\ U_1 = \text{arc tang} \frac{U'_x}{U'_y}; \end{cases}$$

nous aurons

$$(9) \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = e^{V_1 + iU_1}.$$

Les courbes représentées par l'équation $V_1 = \text{const.}$ sont les *lignes isovectorielles* de la fonction $f(z)$; sur chacune d'elles, la longueur du vecteur est constante en chaque point.

Les courbes représentées par l'équation $U_1 = \text{const.}$ sont les *lignes isocliniques* de la fonction $f(z)$; sur chacune d'elles le vecteur reste en chaque point parallèle à une droite fixe.

Les formules (3), (4) et (6), établies entre les dérivées partielles de U et de V , existent aussi entre les dérivées partielles de U_1 et de V_1 . Il en résulte notamment que *les lignes isovectorielles et les lignes isocliniques forment deux systèmes orthogonaux.*

Examinons le cas où la fonction $f(z)$ peut s'exprimer par un produit de facteurs binômes de la forme $(z - \zeta)^a$, en désignant par $\zeta = \xi + \tau i$ la coordonnée affixe d'un point déterminé du plan,

et par μ un exposant réel (positif ou négatif, commensurable ou incommensurable). Nous aurons alors

$$(10) \quad f(z) = \Pi (z - \zeta)^\mu.$$

Posons

$$(11) \quad z - \zeta = re^{ui};$$

nous aurons

$$(12) \quad \begin{cases} V = \log \text{ nép. } \Pi r^\mu = \Sigma \mu \log \text{ nép. } r, \\ U = \Sigma \mu ui, \\ \frac{f'(z)}{f(z)} = \Sigma \frac{\mu}{z - \zeta}. \end{cases}$$

La fonction $f(z)$ admet pour zéros les points ζ auxquels correspondent des exposants μ positifs et pour infinis les points ζ auxquels correspondent des exposants μ négatifs.

La fonction V est évidemment un *potentiel* et, par conséquent, la fonction U en est un autre.

1° Assimilons les zéros ζ à des centres d'action attirant le point z , proportionnellement à leur masse et en raison inverse de la distance, et les infinis ζ à des centres d'action repoussant le point z suivant la même loi. Le vecteur modulaire représentera en grandeur et en direction l'action totale exercée sur le point z .

2° Assimilons les zéros ζ à des sources d'électricité positive, débitant par seconde, sur la surface du plan supposée conductrice, les quantités μ , et les infinis ζ à des sources analogues d'électricité négative. Le vecteur modulaire sera parallèle et proportionnel au flux d'électricité passant au point z .

3° Supposant le plan non conducteur, assimilons les zéros ζ aux points de passage de courants électriques indéfinis, d'intensités μ , tous de même direction et normaux au plan, et les infinis ζ aux points de passage de courants analogues, mais dirigés en sens contraire. Le vecteur argumentaire sera parallèle et proportionnel à la force magnétique au point z .

Dans chacune de ces hypothèses, les *points neutres* du plan sont les points racines du numérateur de la somme des fractions simples $\frac{\mu}{z - \zeta}$; ils sont en nombre inférieur d'une unité à celui des points ζ , qui peut d'ailleurs devenir infini.

M. APPELL transmet la Note suivante :

Remarque sur les courbes brachistochrones.

On sait que, parmi les courbes joignant deux points fixes A et B, celles qui rendent minimum une intégrale de la forme

$$I = \int_{(A)}^{(B)} \varphi(x, y, z) ds$$

vérifient les équations différentielles

$$(1) \quad \begin{cases} d\left(\varphi \frac{dx}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} ds = 0, \\ d\left(\varphi \frac{dy}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial y} ds = 0, \\ d\left(\varphi \frac{dz}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial z} ds = 0, \end{cases}$$

qui se réduisent à deux. Appelons *courbes C* les courbes obtenues en intégrant ces équations, courbes qui dépendent de quatre constantes arbitraires et qui se réduisent à des droites quand $\varphi = 1$. Ces courbes C sont les trajectoires d'un point libre sollicité par une force dérivant de la fonction des forces

$$U = [\varphi(x, y, z)]^2,$$

ou les courbes brachistochrones, pour une loi de force dérivant de la fonction des forces

$$U' = \left[\frac{1}{\varphi(x, y, z)} \right]^2,$$

la constante des forces vives étant *nulle* dans les deux cas. Elles ont été l'objet de nombreuses recherches qui se trouvent résumées à la fin du deuxième volume des *Leçons de Géométrie* de M. Darboux, recherches qui montrent qu'on peut étendre aux courbes C les propriétés des lignes droites, ou, plus généralement, des lignes géodésiques ⁽¹⁾.

Le point de départ de cette extension réside dans ce théorème de MM. Tait et Thomson :

Soient deux courbes C infiniment voisines, C et C₁, ayant pour extrémités A et B, A₁ et B₁; la variation de l'intégrale I,

(1) Voyez aussi les Notes de M. Andoyer, *Comptes rendus*, 1885, t. CII; de M. O. Bonnet, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1887; de M. Vicaire, *Comptes rendus*, 1888, t. CVI, et la quatorzième Leçon de mon *Cours de Mécanique*, rédigé par MM. Abraham et Delassus.

quand on passe de C à C₁, est

$$- \overline{AA_1} \varphi(A) \cos \widehat{BAA_1} - \overline{BB_1} \varphi(B) \cos \widehat{ABB_1},$$

$\varphi(A)$ et $\varphi(B)$ désignant les valeurs de $\varphi(x, y, z)$ aux extrémités A et B.

Les conséquences de ce théorème sont identiques à celles qu'on déduit du théorème analogue sur la ligne droite ($\varphi = 1$), relativement à la théorie des *surfaces parallèles* (théorème de Tait et Thomson), des *développées*, des *lignes de courbure*, etc., à condition de remplacer partout les longueurs des arcs de courbes par les valeurs correspondantes de l'intégrale I.

Nous voulons attirer surtout l'attention sur ce fait, qui ne paraît pas avoir été remarqué, que, si l'on interprète ces théorèmes à l'aide des courbes *brachistochrones*, on est conduit à des énoncés aussi simples que pour la théorie des *développées*, des *lignes de courbure*, etc., en remplaçant partout les arcs de courbes par le temps que met le mobile à les parcourir sans frottement, la constante des forces vives étant nulle.

Nous ne nous arrêtons pas ici à développer cette théorie, ni à examiner des cas particuliers, qui cependant conduisent à quelques exercices dignes d'intérêt sur les courbes brachistochrones.

M. GUIMARAES adresse la Note suivante :

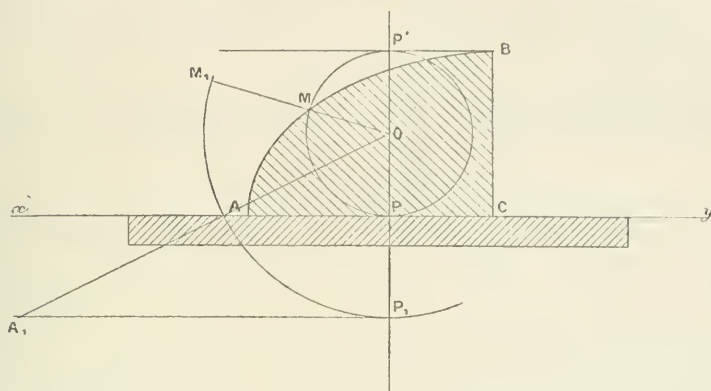
*Sur une équerre cycloïdale propre à effectuer
la rectification des arcs de cercle.*

Soit AMB un arc de cycloïde. Si PMP' est une position de son cercle générateur, on sait que arc PM = PA. Supposons donc qu'on ait taillé dans une matière quelconque l'équerre ACB donnant par son côté AB le gabarit de la cycloïde. Une règle étant posée le long de la tangente xy menée au cercle O par le point P, il n'y aura qu'à faire glisser le bord AC de l'équerre le long de cette règle jusqu'à ce que le bord curviligne AB passe au point M pour avoir AP = arc MP.

Si l'arc à rectifier M₁P₁ a un rayon différent de OP, il suffit de tracer l'arc concentrique MP de même ouverture et, après l'avoir rectifié en PA, de prendre le point de rencontre A₁ de OA et de la tangente en P₁ à l'arc primitif.

L'équerre cycloïdale ABC permet donc de ramener les divers

problèmes qu'on peut se proposer sur l'évaluation des longueurs et la division des arcs aux mêmes problèmes effectués sur des seg-



ments de droites. L'opération matérielle à exécuter n'est pas plus compliquée que celle qu'exige le tracé des parallèles avec l'équerre ordinaire.

En particulier, l'inscription des polygones réguliers dans le cercle est très simple par ce moyen.

Le problème de la division des angles, se ramenant à celui de la division des arcs, reçoit en même temps une solution.

SÉANCE DU 20 MAI 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Démission : M. Bapst adresse sa démission de membre de la Société.

Communications :

M. Bioche : *Sur les systèmes de courbes transformées homographiques les unes des autres.*

M. Godefroy adresse par l'intermédiaire de M. Fouret une Note *Sur une relation entre les rayons de courbure des développées des courbes réciproques.*

M. Fouret : *Sur un problème d'assurances.*

M. FÉLIX LUCAS fait la Communication suivante :

Sur les fonctions d'une variable imaginaire.

Je mets, comme dans ma précédente Communication, la fonction

sous la forme

$$(1) \quad f(z) = e^{V+U i}.$$

Si le point M, représenté par z , parcourt un élément de trajectoire

$$dz = dx + i dy,$$

le travail correspondant de la *force argumentaire* $-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}$ est

$$(2) \quad -\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy = \frac{\partial V}{\partial y} dx - \frac{\partial V}{\partial x} dy.$$

Le second membre de cette identité représente le produit de la *force modulaire* $-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}$, par la projection de dz sur la direction obtenue en faisant tourner cette force d'un angle droit en sens contraire du mouvement des aiguilles de la montre; c'est, par conséquent, le *flux de force modulaire* correspondant au parcours dz ; de là ce théorème : *Lorsque z décrit une trajectoire quelconque, le flux de force modulaire est égal au travail argumentaire.*

Considérons le cas où

$$(3) \quad f(z) = \Pi(z - \zeta)^\mu,$$

ζ coordonnée d'un point fixe C du plan, μ exposant réel quelconque (positif ou négatif, commensurable ou non). Posons

$$(4) \quad z - \zeta = r e^{ui};$$

nous aurons

$$(5) \quad f(z) = e^{\Sigma \mu (\log \text{ nép. } r + u i)}$$

et, par conséquent,

$$(6) \quad V = \Sigma \mu \log \text{ nép. } r.$$

Les projections de la force argumentaire sont donc

$$(7) \quad \begin{cases} -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\mu}{r} \frac{\partial r}{\partial (x - \xi)} \\ -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\mu}{r} \frac{\partial r}{\partial (y - \eta)}; \end{cases}$$

ce sont les projections d'une force centrale exercée sur M par le point C, supposé doué de la masse μ , en raison inverse de la distance MC, cette force étant attractive ou répulsive, suivant que μ est positif ou négatif, ou, en d'autres termes, suivant que μ est un zéro ou un infini de $f(z)$.

Faisons décrire à M un contour fermé *simple*, c'est-à-dire n'ayant

aucun point nodal; un raisonnement analogue à celui par lequel on démontre le théorème de Green relatif aux flux de force dans l'espace nous conduit au théorème suivant : *Le flux de force modulaire relatif à un contour fermé simple, parcouru en sens contraire du mouvement des aiguilles de la montre, est égal et de signe contraire au produit de 2π par la somme algébrique des exposants ν des zéros et des infinis de $f(z)$ qui sont situés dans l'intérieur de ce contour.*

Les flux de force élémentaires sont évalués comme *positifs* ou comme *négatifs* suivant qu'ils sont *sortants* ou *entrants*.

Examinons le cas particulier où $f(z)$ est un polynôme entier du degré p ,

$$(8) \quad f(z) = z^p + \Lambda_1 z^{p-1} + \dots + \Lambda_{p-1} z + \Lambda_p,$$

qui ne peut pas avoir d'infinis à distance finie. Pour un point z pris à une distance infiniment grande r de l'origine, ce polynôme tend vers z^p , en sorte que V tend vers $-p \log \text{nép. } r$. La force modulaire correspondante est une attraction émanant de l'origine des coordonnées supposée douée de la masse p ; le flux de force correspondant au parcours d'une circonférence de rayon r ayant son centre à l'origine des coordonnées est $-2\pi p$; par conséquent : *La somme des exposants des zéros d'un polynôme de degré p est égale au degré p de ce polynôme.*

Ce polynôme a donc, soit un zéro multiple du degré p , soit plusieurs zéros distincts; comme l'existence d'un zéro ζ entraîne la divisibilité du polynôme par $(z - \zeta)$, les exposants des zéros sont nécessairement tous entiers; de là cette conséquence :

THÉORÈME DE CAUCHY. — *Une équation algébrique du degré p a toujours un système de racines, réelles ou imaginaires, dont les degrés de multiplicité donnent une somme égale au degré p .*

Le théorème relatif au flux de force modulaire pour un contour fermé simple peut aussi s'énoncer sous la forme suivante : *Le parcours d'un contour fermé simple en sens contraire du mouvement des aiguilles de la montre fait subir à l'argument de la fonction $f(z)$ un accroissement égal au produit de 2π par la somme algébrique des exposants des zéros et des infinis contenus dans l'intérieur de ce contour.*

On a, en effet,

$$\int dU = \int \frac{\partial U}{\partial x} dx + \int \frac{\partial U}{\partial y} dy = - \int \left(\frac{\partial V}{\partial y} dx - \frac{\partial V}{\partial x} dy \right) = 2\pi m,$$

m désignant la somme algébrique des exposants μ des zéros et des infinis renfermés dans le contour.

M. APPELL adresse la Note suivante :

Sur le mouvement d'un point en coordonnées elliptiques.

Soient x, y, z les coordonnées cartésiennes d'un point, et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les coordonnées elliptiques racines de l'équation

$$\frac{x^2}{a_1 + \lambda} + \frac{y^2}{a_2 + \lambda} + \frac{z^2}{a_3 + \lambda} - 1 = 0.$$

Les équations du mouvement d'un point libre en coordonnées elliptiques ont été ramenées à des quadratures par Jacobi (*Vorlesungen über Dynamik*) dans le cas où le point n'est sollicité par aucune force, ou est attiré par l'origine proportionnellement à la distance. La méthode de Jacobi conduit encore à des quadratures, comme il est connu, quand le point est en outre attiré par chacun des plans coordonnés en raison inverse du cube de la distance.

On peut ramener aux quadratures le cas plus général où le point serait sollicité par une force dérivant d'une fonction des forces de la forme

$$(1) \quad U = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & U_1 \\ 1 & \lambda_2 & U_2 \\ 1 & \lambda_3 & U_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}},$$

U_1 étant fonction de la seule variable λ_1 , U_2 de λ_2 , U_3 de λ_3 . Il suffit d'ajouter U_1, U_2, U_3 aux expressions qui figurent sous les radicaux dans la trentième leçon de Jacobi. En particulier, si l'on suppose

$$U_1 = R(\lambda_1), \quad U_2 = R(\lambda_2), \quad U_3 = R(\lambda_3),$$

$R(\lambda)$ étant une fonction rationnelle de λ , la fonction U sera *rationnelle et symétrique* en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; ce sera donc une fonction

rationnelle de x^2, y^2, z^2 facile à calculer. Ainsi $R(\lambda) = \frac{k}{\lambda}$ donne

$$U = \frac{h}{\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} + \frac{z^2}{a_3} - 1}.$$

Cette remarque s'étend évidemment sous la même forme au cas de n variables traité par Jacobi.

Il serait intéressant d'obtenir les fonctions de forces U de la forme (1) vérifiant l'équation du potentiel

$$(2) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

On aurait ainsi de nouveaux problèmes de mouvement d'un point attiré suivant la loi de Newton pouvant se ramener aux quadratures. La détermination des potentiels U de la forme (1) se fera à l'aide de la transformation bien connue de l'équation (2) en coordonnées elliptiques. Nous nous bornons à indiquer ce dernier point comme un exercice de calcul.

M. D'OCAGNE fait la Communication suivante :

Sur la construction des cubiques cuspidales (unicursales de la troisième classe).

On sait (SALMON, *Courbes planes*, traduction Chemin, p. 257) que l'équation de toute cubique cuspidale peut se mettre sous la forme

$$X_1 X_2^2 = \lambda X_3^3,$$

$X_1 = 0$ étant la tangente IT au point d'inflexion I,
 $X_2 = 0$ la tangente RT au point de rebroussement R,
 $X_3 = 0$ la droite IR joignant ces deux points.

Dès lors, si l'on donne les points d'inflexion et de rebroussement et les tangentes en ces points, c'est-à-dire les trois côtés du triangle IRT, il suffira d'une condition supplémentaire, par exemple de la connaissance d'un point simple P, pour déterminer complètement la courbe.

La courbe étant ainsi définie, la tangente au point P doit se déduire des données. Nous avons, en effet, trouvé que, *si cette tangente coupe la droite IT au point S et que la droite PR coupe IT au point U, on a* $(IUTS) = -\frac{1}{2}$. On peut encore dire

que, si la parallèle menée à PI par T coupe PU en U' et PS en S', on a $S'U' = -\frac{TU'}{2}$.

Si la droite PR est parallèle à IT, le point U est rejeté à l'infini et l'on a ce théorème : *Si la parallèle à la tangente d'inflexion menée par le point de rebroussement coupe la cubique au point P₁, la tangente en P₁ coupe la tangente d'inflexion en un point S₁ tel que S₁I = - 2TI.*

Si la tangente PS est parallèle à IT, c'est le point S qui est rejeté à l'infini, et l'on a cet autre théorème : *La droite qui joint le point de rebroussement au point P₂, où la tangente est parallèle à la tangente d'inflexion, coupe celle-ci en un point U₂ tel que TU₂ = - 2TI.*

On voit que les points S₁ et U₂, qui viennent d'être définis, sont symétriques par rapport au milieu de TI.

La cubique cuspidale étant complètement déterminée par le triangle IRT et le point P, voici comment s'obtiendront les divers points de cette cubique au moyen de ces données :

RQ étant la conjuguée harmonique, tracée une fois pour toutes, de RP par rapport à RT et RI, menons par le point T une droite quelconque qui coupe RP en A, RQ en B, IP en C, et prenons le conjugué harmonique D de C par rapport à A et B. Le point de rencontre M des droites RC et ID engendre la cubique lorsque la droite TA pivote autour du point T.

La tangente en M sera déterminée de la même façon que l'a été précédemment la tangente en P.

Si, en outre du triangle RIT, on se donnait, comme condition supplémentaire, une tangente au lieu d'un point, on n'aurait qu'à déterminer, au moyen du premier des théorèmes susénoncés, le point de contact de cette tangente pour être ramené au cas précédent.

Ce théorème prend d'ailleurs une forme particulière dans les deux cas suivants : 1° *Le point d'inflexion est à l'infini.* La relation $(IUTS) = -\frac{1}{2}$ devient alors $\frac{SU}{TU} = -\frac{1}{2}$, ou $US = \frac{TU}{2}$. 2° *Les tangentes au point d'inflexion et au point de rebroussement sont parallèles.* Le point T étant alors à l'infini, on a $\frac{SU}{SI} = -\frac{1}{2}$, ou $US = \frac{UI}{3}$.

SÉANCE DU 3 JUIN 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. LAISANT fait la Communication suivante :

Sur deux problèmes de permutations.

Dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 11 mai 1891), j'ai indiqué une solution générale du problème suivant :

Trouver le nombre des permutations sans répétitions que l'on peut former avec n objets différents $a, b, c, \dots, h, l$, chacune des n places ne pouvant être occupée que par certains de ces objets.

Si l'on appelle $a_k, b_k, c_k, \dots$ ceux des n objets qui peuvent seuls occuper la place de rang k , et si l'on forme le produit

$$(a_1 + b_1 + c_1 + \dots)(a_2 + b_2 + c_2 + \dots) \dots (a_n + b_n + c_n + \dots) \\ = F(a, b, c, \dots, l),$$

on trouve que le nombre cherché a pour expression

$$\frac{d^n F(a, b, c, \dots, l)}{da db dc \dots dl}.$$

Cette formule est, dans la plupart des cas, d'une application difficile, à cause de la longueur des calculs. Elle peut néanmoins être d'une certaine utilité en ce qu'elle permet de vérifier parfois numériquement des résultats obtenus par une voie différente.

J'en donnerai simplement ici deux exemples, en me bornant à indiquer sommairement les résultats.

PROBLÈME I. — *n groupes de deux personnes (mari et femme) devant s'asseoir autour d'une table, et les n femmes s'étant assises en laissant une place vide entre deux quelconques d'entre elles, de combien de manières leurs maris peuvent-ils occuper les places vides, sous la condition qu'un mari ne se trouve pas à côté de sa femme?*

On traduit facilement cette question par la suivante : *Sur un*

échiquier carré de n^2 cases, de combien de manières peut-on placer n tours qui ne soient pas en prise réciproque deux à deux, sous la condition que les cases 1, 2 dans la première colonne, 2, 3 dans la deuxième, ..., $(n-1)$, n dans la $(n-1)^{i\text{ème}}$, et $n, 1$ dans la $n^{\text{ième}}$, restent inoccupées?

Cette nouvelle forme de la question m'a permis ⁽¹⁾, par des considérations simples, mais cependant assez délicates, d'arriver à la formule récurrente suivante, en appelant X_n le nombre cherché :

$$(1) \quad X_{n+1} = \frac{n^2 - n + 1}{n - 1} (X_n + X_{n-1}) + \frac{n}{n - 1} X_{n-2}.$$

On a aussi

$$(2) \quad X_{n+1} = (n+1)X_n + 2X_{n-1} - (n-3)X_{n-2} - X_{n-3}.$$

Enfin, la relation (1) permet d'obtenir la suivante, qui est due à M. le colonel Moreau, mais n'a pas encore été publiée,

$$(3) \quad (n-1)X_{n+1} - (n^2-1)X_n - (n+1)X_{n-1} = 4(-1)^n.$$

Le calcul numérique des valeurs X_n est encore facilité par cette remarque : si l'on pose $X_n = X'_n + 2(-1)^n$, puis $\frac{X'_n}{n} = T_n$, on obtient

$$(4) \quad T_{n+1} = nT_n + T_{n-1} + 2(-1)^n,$$

$$(5) \quad T_{n+1} = (n-1)T_n + nT_{n-1} + T_{n-2}.$$

Les premières valeurs de X_n sont $X_3 = 1$, $X_4 = 2$, $X_5 = 13$; et celles de T_n : $T_3 = 0$, $T_4 = 3$, $T_5 = 13$, ce qui rend facile le calcul des valeurs successives.

La fonction F , dont il est question au début de la présente Note, est

$$F(a, b, c, \dots, h, l) = (s-a-b)(s-b-c)\dots(s-h-l)(s-l-a),$$

en posant

$$s = a + b + c + \dots + h + l.$$

L'application de la méthode indiquée plus haut a permis de vérifier les valeurs obtenues jusqu'à $n = 10$, et de s'assurer ainsi,

⁽¹⁾ Les démonstrations détaillées figurent dans la *Théorie des nombres*, de M. Édouard Lucas. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891.

par voie indirecte, de l'exactitude des diverses formules récurrentes écrites plus haut.

PROBLÈME II. — *Sur un échiquier carré de n^2 cases, de combien de manières peut-on placer n tours qui ne soient pas en prise réciproque deux à deux, sous la condition que les cases des deux diagonales restent inoccupées?*

Ce problème, analogue au précédent, m'a conduit aux deux formules récurrentes que voici, en appelant Y_n le nombre cherché :

$$(6) \quad Y_{2n+1} = 2n Y_{2n} + 4n Y_{2n-1},$$

$$(7) \quad Y_{2n+2} = (2n+1) Y_{2n+1} + 4n Y_{2n-2}.$$

En posant

$$\frac{Y_{2n}}{2^n(n-1)} = Z_{2n} \quad \text{et} \quad \frac{Y_{2n+1}}{2^{n+1}n(n-1)} = Z_{2n+1},$$

on obtient

$$(8) \quad Z_{2n+1} = Z_{2n} + 2(n-2)Z_{2n-1},$$

$$(9) \quad Z_{2n+2} = (2n+1)(n-1)Z_{2n+1} + (n-2)Z_{2n-2}.$$

Les premières valeurs sont

$$Y_2 = 0, \quad Y_3 = 0, \quad Y_4 = 4, \quad Y_5 = 16$$

et

$$Z_3 = 0, \quad Z_4 = 1, \quad Z_5 = 1, \quad Z_6 = 5.$$

La fonction F , en posant, comme tout à l'heure,

$$s = a + b + c + \dots + h + l,$$

est

$$F(a, b, c, \dots, h, l) = (s - a - l)(s - b - h) \dots (s - h - b)(s - l - a).$$

Il y a un facteur du milieu lorsque n est impair, et ce facteur est alors de la forme $s - j$; lorsque n est pair, on a

$$F = [(s - a - l)(s - b - h) \dots]^2.$$

Les valeurs fournies par l'application de la méthode indiquée ont permis, comme précédemment, de vérifier les résultats donnés par les formules de récurrence.

Voici, jusqu'à $n = 10$, les valeurs numériques obtenues pour X_n dans le premier problème et Y_n dans le second :

n	3	4	5	6	7	8	9	10
X_n	1	2	13	80	579	4738	43387	439792
Y_n	0	4	16	80	672	4752	48768	440192

M. RAFFY fait une Communication *Sur la détermination des surfaces spirales d'après leur élément linéaire*. Il montre que ce problème, déjà résolu par M. Maurice Lévy (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVII, p. 788) dépend de l'équation

$$y^2 + y'^2 = F(x),$$

qui peut être intégrée dans un certain nombre de cas, notamment quand la fonction F est une constante ou une exponentielle. Il rappelle qu'une équation de même forme détermine les géodésiques des surfaces spirales, et que ces lignes ont été trouvées par d'autres moyens pour plusieurs classes de spirales; il en déduit qu'on peut parfois obtenir au moins une infinité de spirales admettant un élément linéaire donné.

M. D'OCAGNE présente, au sujet de la Communication précédente, la remarque que voici :

L'équation différentielle

$$y^2 + y'^2 = F(x),$$

rencontrée par M. Raffy au cours de ses recherches sur les surfaces spirales, se présente encore (lorsqu'on y remplace respectivement x et y par les coordonnées polaires ω et ρ) dans un autre genre de recherche géométrique.

Je rappellerai d'abord que j'ai appelé *isométriques* d'une courbe C par rapport aux droites issues d'un point O , les courbes dont les arcs compris entre deux droites quelconques issues du point O sont égaux à l'arc de la courbe C compris entre les mêmes droites.

Cela posé, et l'origine étant placée au point O , on voit aisément que l'équation différentielle des isométriques cherchées est

$$\rho^2 + \rho'^2 = \varphi^2(\omega).$$

$\varphi(\omega)$ étant la dérivée $\frac{ds}{d\omega}$ de l'arc de la courbe C donnée par rapport à l'angle polaire.

Analytiquement, le problème est donc identique à celui qu'a envisagé M. Raffy au sujet des surfaces spirales.

Je l'ai résolu complètement dans le cas où la courbe C donnée est une droite (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XIII, p. 75, et t. XVII, p. 171). La fonction $\varphi(\omega)$ est alors inversement proportionnelle à $\cos^2 \omega$.

SÉANCE DU 17 JUIN 1891.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. de Mendizabal présente les épreuves d'un *Recueil de Tables logarithmiques et trigonométriques* qu'il va publier incessamment.

M. Lucien Lévy : *Sur les systèmes de surfaces triplement orthogonales.*

M. Beghin : *Sur certaines singularités que peuvent présenter les fonctions monodromes qui admettent des espaces lacunaires.*

M. d'Ocagne : *Sur la représentation graphique d'une classe d'équations à quatre variables.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Relation entre les rayons de courbure des développées des courbes réciproques; par M. R. GODEFROY.

Suivant M. Habich [*Sur un système particulier de coordonnées*, etc. (*Annali di Matematica*, t. II, 1868)], deux courbes (A), (B) sont dites *réciproques par rapport à une courbe (C)*, si elles coupent constamment sous des angles supplémentaires les tangentes de (C). Les centres de courbure de ces courbes en deux

points correspondants sont en ligne droite avec le point où la droite mobile touche son enveloppe. Ce théorème a été déduit par M. Habich de la formule

$$\frac{n}{r} + \frac{n'}{r'} = 2$$

(r, r' rayons de courbure des deux courbes; n, n' longueurs des normales limitées aux points où elles coupent la normale à l'enveloppe de la droite) dont il a donné la démonstration pour le cas plus général où la somme des angles de la droite avec les deux courbes est constante.

Cette formule avait été établie par M. Nicolaidès dans le cas particulier de courbes réciproques par rapport à un point (*Nouv. Ann.*, 2^e série, t. IV; 1865).

Voici d'abord une démonstration directe fort simple, et sans doute connue, de la propriété des centres de courbure de deux courbes réciproques. Les triangles formés par deux éléments d'arcs correspondants des courbes (A), (B) et par les normales à leurs extrémités sont homologues. La tangente au lieu du point de rencontre de deux normales correspondantes passe en effet au point de concours des tangentes correspondantes de (A) et (B). D'où il suit immédiatement que les centres de courbure en A et B et le point où AB touche son enveloppe sont en ligne droite.

Si R, R' sont les rayons de courbure et L, L' les distances des centres de courbure au point où AB touche son enveloppe, on peut dire que la liaison entre les rayons de courbure et le point de l'enveloppe est exprimée par la relation

$$(1) \quad \frac{R}{L} = \frac{R'}{L'}$$

Nous nous servirons tout à l'heure du théorème qui vient d'être rappelé, pour démontrer la relation existant entre les rayons de courbure des développées des courbes réciproques et celui de la courbe enveloppe de la droite mobile.

Mais, auparavant, nous nous occuperons du problème suivant (1) :

Les tangentes en deux points L, L₁ des courbes (L), (L₁) se

(1) Le lecteur est prié de faire les figures.

coupent en A. La droite LL_1 enveloppant une courbe (M) qu'elle touche en M, le point A décrit une courbe (N) dont la normale est AP. Trouver la relation existant entre les rayons de courbure r, r_1 en L, L_1 , les longueurs $LM = l$, $L_1M = l_1$ et les angles

$$ALM = \lambda, \quad AL_1M = \lambda_1, \quad LAP = z, \quad L_1AP = z_1.$$

Une formule bien connue, due à Newton, donne

$$(2) \quad \frac{l}{l_1} = \frac{dL}{dL_1} \frac{AL_1}{AL};$$

mais

$$dL = r\varepsilon, \quad dL_1 = r_1\varepsilon_1,$$

$\varepsilon, \varepsilon_1$ étant les angles de contingence de (L) et (L_1) en L et L_1 .

Par suite

$$\frac{dL}{dL_1} = \frac{r}{r_1} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}.$$

Le rapport $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$ est égal au rapport des segments de la normale AP compris entre A et les normales en L_1 et L. Or ces segments sont égaux à

$$\frac{AL_1}{\cos z_1} \quad \text{et} \quad \frac{AL}{\cos z};$$

on a donc

$$\frac{dL}{dL_1} = \frac{rAL_1 \cos z}{r_1AL \cos z_1}.$$

La formule (2) devient alors

$$\frac{l}{l_1} = \frac{\overline{rAL_1 \cos z}^2}{rAL \cos z_1},$$

ou

$$\frac{l}{l_1} = \frac{r \sin^2 \lambda \cos z}{r_1 \sin^2 \lambda_1 \cos z_1},$$

que nous écrirons

$$\frac{r \sin^2 \lambda \cos z}{l} = \frac{r_1 \sin^2 \lambda_1 \cos z_1}{l_1}.$$

C'est la relation que nous avons en vue.

Tout ceci est, en somme, parfaitement connu (BOUST, *Analyse infinitésimale des courbes planes*, Livre II, Chap. IV, p. 291).

Ce n'est, au surplus, que l'application au cas considéré du

théorème général de M. Mannheim sur le déplacement infiniment petit des figures polygonales de forme variable (*Sur les polygones plans inscrits et circonscrits*, à la suite des *Applications d'Analyse et de Géométrie* de Poncelet et *Géométrie descriptive*, 15^e Leçon, Supplément).

On remarquera, en passant, l'usage qui peut être fait de la relation précédente, dont nous n'utiliserons qu'un cas particulier pour l'objet qui nous occupe.

Si AL se confond avec la normale en A, r est le rayon de courbure de la développée de A. La formule devient

$$\frac{r \sin^2 \lambda}{l} = \frac{r_1 \sin^2 \lambda_1 \cos \alpha_1}{l_1}.$$

Si deux courbes (A) et (A') jouissent de cette propriété que leurs centres de courbure en deux points correspondants A et A' soient constamment sur une droite passant au point L₁, où la droite AA' touche son enveloppe, les rayons de courbure de leurs développées sont liés entre eux et avec les éléments déjà considérés par les formules

$$(3) \quad \frac{r \sin^2 \lambda}{l \cos \alpha_1} = \frac{r' \sin^2 \lambda'}{l' \cos \alpha'_1} = \frac{r_1 \sin^2 \lambda_1}{l_1}.$$

Ces formules sont applicables aux cas suivants :

1^o Une courbe B est telle que le rapport $\frac{BA}{BA'}$ des distances de chacun de ses points à deux courbes (A) et (A') est constant. Les centres de courbure de (A) et (A') en deux points correspondants A, A' sont alors en ligne droite avec le point où AA' touche son enveloppe. On le voit, comme précédemment, par la considération de deux triangles homologues. Les rayons de courbure des développées de (A), de (A') et de l'enveloppe de AA' satisfont, par suite, à la relation (3) (Application aux caustiques par réfraction, etc.) (1).

2^o *Courbes réciproques.* — La relation cherchée est simple-

(1) Le problème de la détermination des rayons de courbure des caustiques par réfraction a déjà été traité par M. Mannheim (*Développements de Géométrie cinématique*, pages 51 à 62 de la *Collection de Mémoires publiés par la Société Philomathique*, à l'occasion du centenaire de sa fondation, année 1888).

ment

$$\frac{r \sin^2 \lambda}{l} = \frac{r' \sin^2 \lambda'}{l'} = \frac{r_1 \sin^2 \lambda_1 \cos \alpha_1}{l_1}.$$

(Application aux caustiques par réflexion.)

Le cas particulier le plus remarquable est celui des courbes transformées par rayons vecteurs réciproques. L'enveloppe de LL' étant le pôle de transformation, r_1 est nul, et la liaison entre le rayon de courbure d'une courbe et celui de sa transformée est simplement exprimée par la formule

$$(4) \quad \frac{r \sin^2 \lambda}{l} = \frac{r' \sin^2 \lambda'}{l'}.$$

Soient LC , LC' les rayons de courbure des développées de (A) et de (A') ; menons $L'C'_1 = L'C'$ parallèlement à LC ; de C et C'_1 , abaissons des perpendiculaires sur LL' , puis des pieds de celles-ci des perpendiculaires sur LC et $L'C'_1$; D et D' sont sur ces droites les pieds de ces perpendiculaires.

On a

$$LD = r \sin^2 \lambda, \quad L'D' = r' \sin^2 \lambda',$$

par suite

$$\frac{LD}{l} = \frac{L'D'}{l'}.$$

Les points D et D' sont donc en ligne droite avec le pôle de transformation.

Ceci indique la construction à effectuer pour obtenir l'un des rayons de courbure connaissant l'autre. L'un des centres de courbure permet d'avoir l'un des points D ou D' ; on en déduit l'autre et, par une construction inverse, le rayon de courbure inconnu. Les cas particuliers sont nombreux. Nous ne nous y arrêtons pas.

La courbe (A') , polaire réciproque d'une courbe quelconque (C) , la conique auxiliaire étant une circonférence, est la transformée par rayons vecteurs réciproques de la podaire (A) de (C) par rapport au centre du cercle. Les relations (1) et (4) sont, par suite, applicables à ces courbes. On a ainsi les relations entre les rayons de courbure des développées d'une courbe, de sa podaire et de sa polaire réciproque.

Développement du quotient de deux fonctions holomorphes, théorie des séries récurrentes ⁽¹⁾ ; par M. DE PRESLE.

1. *Quotient de deux séries ordonnées suivant les puissances croissantes de la variable.* — Soient le dividende, le diviseur, le quotient

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots, \\ b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots, \\ c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots \end{aligned}$$

On a, en égalant les coefficients de x^p dans le dividende et dans le produit du diviseur par le quotient,

$$(1) \quad a_p = b_p c_0 + b_{p-1} c_1 + b_{p-2} c_2 + \dots + b_{p-q} c_q + \dots + b_0 c_p,$$

relation permettant de calculer, de proche en proche, les coefficients du quotient. On pourrait, par là, obtenir la formule donnant un coefficient quelconque; nous préférons employer une autre méthode.

Remarquons que, si l'on connaissait les coefficients l du quotient, dans le cas où le dividende serait l'unité, on aurait

$$(2) \quad c_p = a_p l_0 + a_{p-1} l_1 + a_{p-2} l_2 + \dots + a_{p-q} l_q + \dots + a_0 l_p.$$

Nous sommes ramené à ce dernier cas, et nous allons d'abord chercher la formule des coefficients l dans le cas où b_0 est l'unité.

2. *Inverse d'une série ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable et dont le premier terme est l'unité.* — De la relation (1) dans laquelle nous supposons a_0 et b_0 égaux à l'unité et tous les autres a nuls, nous déduisons

$$\begin{aligned} l_0 &= 1, \\ b_1 + l_1 &= 0, \\ b_2 + b_1 l_1 + l_2 &= 0, \\ b_3 + b_2 l_1 + b_1 l_2 + l_3 &= 0, \\ b_4 + b_3 l_1 + b_2 l_2 + b_1 l_3 + l_4 &= 0, \\ b_5 + b_4 l_1 + b_3 l_2 + b_2 l_3 + b_1 l_4 + l_5 &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

(1) L'équation servant de base à cette théorie est la même que celle donnée par M. Désiré André dans sa thèse *Sur le terme général d'une série déterminée à la façon des séries récurrentes*.

Le calcul des valeurs de l donne

$$\begin{aligned} l_1 &= -b_1, \\ l_2 &= -b_2 + b_1^2, \\ l_3 &= -b_3 + 2b_2b_1 - b_1^3, \\ l_4 &= -b_4 + 2b_3b_1 + b_2^2 - 3b_2b_1^2 + b_1^4, \\ l_5 &= -b_5 + 2b_4b_1 + 2b_3b_2 - 3b_3b_1^2 - 3b_2^2b_1 + 4b_2b_1^3 - b_1^5, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On reconnaît les lois suivantes de formation :

1° l_p se compose de tous les termes de poids p que l'on peut former avec les b jusqu'à b_p inclusivement ;

2° Ces termes sont positifs ou négatifs, selon que le nombre de leurs facteurs est pair ou impair ;

3° Le coefficient de chaque terme est le coefficient polynomial qu'il aurait, eu égard au nombre des facteurs et à leurs exposants.

L'exactitude de ces lois se démontre en faisant voir que, si elles ont lieu jusqu'à un certain indice, elles auront encore lieu pour l'indice suivant. Aucune difficulté pour les deux premières.

Pour la troisième, nous allons raisonner sur un cas particulier ; mais il sera évident que la conclusion est générale.

Considérons le terme $b_3^1 b_2^3 b_1^5$ de degré 12 et de poids 23 ; il appartient à l_{23} . Le coefficient de ce terme est égal à la somme des coefficients des trois termes suivants de degré 11 :

$$\begin{array}{lll} b_3^2 b_2^2 b_1^4 & \text{de poids 22 appartenant à } l_{22}, \\ b_3^2 b_2^2 b_1^5 & \text{» 21 » } l_{21}, \\ b_3^3 b_2^2 b_1^5 & \text{» 20 » } l_{20}. \end{array}$$

Les coefficients de ces derniers termes, suivant la loi polynomiale, sont

$$\frac{11!}{4!3!4!}, \quad \frac{11!}{4!2!5!}, \quad \frac{11!}{3!3!5!}$$

ou

$$\frac{11!}{3!2!4!} \cdot \frac{1}{4 \cdot 3}, \quad \frac{11!}{3!2!4!} \cdot \frac{1}{4 \cdot 5}, \quad \frac{11!}{3!2!4!} \cdot \frac{1}{3 \cdot 5},$$

dont la somme est

$$\frac{11!}{3!2!4!} \left(\frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5} \right) = \frac{11! (5 + 3 + 4)}{3!2!4!5 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{12!}{4!3!5!},$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. *Inverse d'une série ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable et dont le premier terme est quelconque.* — Mêmes notations que précédemment, seulement b_0 et l_0 sont différents de l'unité ; nous ramènerons ce cas au précédent en remplaçant b_q par $\frac{b_q}{b_0}$ et divisant par b_0 le résultat obtenu ; donc :

l_0 est égal $\frac{1}{b_0}$ et l_p s'obtient en formant la même expression que précédemment, en la rendant de degré p à l'aide de facteurs b_0 et en la divisant ensuite par b_0^{p+1} .

Par exemple, on aura

$$l_5 = \frac{-b_5 b_1^4 + 2 b_1 b_1 b_0^3 + 2 b_3 b_2 b_0^3 - 3 b_3 b_1^2 b_0^2 - 3 b_3^2 b_1 b_0^2 + 4 b_2 b_1^3 b_0 - b_1^5}{b_0^6}.$$

4. *Développement de fonctions.* — La question de convergence réservée, les relations précédentes donnent les coefficients des fonctions qui sont les quotients de fonctions dont on connaît la loi de développement, telles que

$$\operatorname{tang} x, \operatorname{cot} x, \operatorname{séc} x, \operatorname{coséc} x.$$

Les mêmes relations donnent également les coefficients du développement des fonctions rationnelles. Si l'on désigne par n et m les plus forts exposants du numérateur et du dénominateur, d'après la relation (1), on aura, si n n'est pas moindre que m ,

$$(3) \quad b_m c_{n-m+1} + b_{m-1} c_{n-m+2} + \dots + b_0 c_{n+1} = 0,$$

et, si n est moindre que m ,

$$(4) \quad b_m c_0 + b_{m-1} c_1 + \dots + b_0 c_m = 0.$$

Les mêmes relations auront lieu en augmentant d'un même nombre les indices des coefficients du quotient à partir des limites précédentes. De là, une nouvelle notion, celle de la *réurrence des séries*.

5. *Définition des séries récurrentes.* — Une série

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n + \dots$$

est dite *récurrente*, lorsque, pour toutes les valeurs de p supérieures à une certaine limite, le coefficient de x^p peut s'exprimer,

quel que soit p , par une même fonction linéaire des coefficients des puissances inférieures pris en nombre fixe.

En d'autres termes, la série considérée sera récurrente si, pour toutes les valeurs de p qui surpassent une certaine limite, on a identiquement

$$b_m c_{p-m} + b_{m-1} c_{p-m+1} + \dots + b_0 c_p = 0,$$

p étant un entier quelconque, et $b_m, b_{m-1}, \dots, b_0$ des quantités constantes, dont la suite est l'échelle de relation de la série récurrente.

6. *Quand une fraction rationnelle peut se développer en une série convergente suivant les puissances croissantes de la variable, cette série est récurrente.* (Nous supposons un terme indépendant de la variable au numérateur et au dénominateur).

— Les constantes de l'échelle de relation sont les coefficients du dénominateur placés par ordre d'indices décroissants. Si le degré du numérateur est moindre que le degré du dénominateur, la première relation de récurrence contient les coefficients du quotient dont les indices sont les exposants de la variable au dénominateur, placés par ordre d'indices décroissants. Si le degré du numérateur n'est pas moindre que le degré du dénominateur, les indices des coefficients du quotient seront augmentés d'un même nombre, de telle sorte que l'indice le plus fort soit égal au degré du numérateur augmenté d'une unité.

Démonstration donnée au n° 4.

7. *Quand une série ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable est à la fois convergente et récurrente, elle a pour somme une fraction rationnelle.* (Nous supposons que la série contient un terme indépendant de la variable.) — Le dénominateur s'obtient en faisant la somme des produits des constantes de l'échelle de relation, placées en ordre inverse, par des puissances de la variable croissant à partir de l'exposant zéro. Si, dans la première relation de récurrence, le plus faible des indices des coefficients de la série n'est pas nul, le degré du numérateur est égal au plus fort de ces indices diminué d'une unité.

En effet, si l'on forme une fraction rationnelle, dont le dénomi-

nateur satisfasse à la règle énoncée, et si l'on calcule les termes du numérateur d'après la relation (1), le développement de cette fraction rationnelle sera identique à la série proposée.

Note sur les intersections de trois quadriques;

par M. FÉLIX LUCAS.

Soient $U=0$, $V=0$, $W=0$ les équations de trois quadriques, se coupant en huit points M , réels ou imaginaires.

Désignons par x_1 , y_1 , z_1 les coordonnées d'un point d'intersection M_1 et posons

$$\xi = \frac{x+x_1}{2}, \quad \eta = \frac{y+y_1}{2}, \quad \zeta = \frac{z+z_1}{2}.$$

Les équations des quadriques peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$(x-x_1)U'_\xi + (y-y_1)U'_\eta + (z-z_1)U'_\zeta = 0,$$

$$(x-x_1)V'_\xi + (y-y_1)V'_\eta + (z-z_1)V'_\zeta = 0,$$

$$(x-x_1)W'_\xi + (y-y_1)W'_\eta + (z-z_1)W'_\zeta = 0;$$

car les premiers membres de ces trois équations sont identiques à U , V , W .

En éliminant $(x-x_1)$, $(y-y_1)$, $(z-z_1)$, nous obtenons l'équation d'une surface du troisième degré en x , y , z ,

$$\begin{vmatrix} U'_\xi & U'_\eta & U'_\zeta \\ V'_\xi & V'_\eta & V'_\zeta \\ W'_\xi & W'_\eta & W'_\zeta \end{vmatrix} = 0.$$

qui passe par les sept points d'intersection autres que M_1 des trois quadriques données. En considérant ξ , η , ζ comme des coordonnées courantes, on obtient une autre surface du troisième degré qui passe par le milieu des vingt-huit cordes communes aux trois quadriques.

Il est clair, d'ailleurs, que l'on obtiendrait la même équation en cherchant le lieu géométrique des centres (ξ, η, ζ) des quadriques qui passent par les huit points M , et dont l'équation générale est

$$\lambda U + \mu V + \nu W = 0.$$

Donc les milieux des vingt-huit cordes communes à trois quadriques appartiennent à une surface du troisième ordre qui est le lieu des centres des quadriques passant par les huit points d'intersection des trois premières.

Il est à remarquer que cette surface du troisième degré reste invariable si l'on regarde comme arbitraires les termes constants de U, V, W ; elle est, par conséquent, le lieu géométrique des milieux des vingt-huit cordes communes à trois quadriques quelconques dont les équations diffèrent de celles de U, V, W , par leurs termes constants respectifs.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 1^{er} JUILLET 1891.

PRÉSIDENTE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. D. ANDRÉ expose une démonstration nouvelle du théorème suivant, donné autrefois par lui : *Parmi les permutations de n nombres distincts, n étant égal ou supérieur à quatre, le nombre de celles qui présentent un nombre pair de séquences est égal au nombre de celles qui en présentent un nombre impair.*

M. LAISANT : *Généralisation d'une transformation qui intervient dans un problème récemment proposé.*

M. d'Ocagne présente quelques observations sur le même sujet.

M. BEGHIN : *Sur une question d'Arithmétique à laquelle donne lieu l'étude des points isolés d'une fonction à espaces lacunaires.*

M. LAISANT présente une observation sur le même sujet.

SÉANCE DU 13 JUILLET 1891.

PRÉSIDENTE DE M. D'OcAGNE.

Communications :

M. LEMOINE : *Sur une transformation relative à la géométrie du triangle.*

M. Raffy : *Sur la déformation de certaines surfaces de révolution.*

M. Briche fait la Communication suivante :

Sur une classe de surfaces gauches.

Il peut arriver, comme je l'ai fait remarquer dans une Communication verbale à la Société, que les lignes asymptotiques d'une surface réglée se transforment les unes dans les autres par homographie. Je me suis proposé de déterminer parmi les surfaces réglées, dont les génératrices font partie d'un complexe linéaire, celles qui possèdent la propriété énoncée. Voici les résultats auxquels je suis parvenu.

On peut reconnaître par de simples considérations géométriques que les génératrices de ces surfaces rencontrent au moins une droite. Ces surfaces se déduisent donc par homographie des surfaces à plan directeur.

Si l'on suppose les points homologues situés sur une même génératrice, la condition nécessaire et suffisante est que les tangentes d'une asymptotique quelconque appartiennent à un complexe linéaire. Les génératrices de la surface font alors partie d'une congruence linéaire. Les surfaces répondant aux conditions proposées sont donc les transformées homographiques des conoïdes, ou des surfaces dont l'équation générale peut s'écrire

$$ay = xz + F(z).$$

Ces dernières sont les surfaces dont les génératrices font partie d'une congruence singulière ayant pour directrice la droite à l'infini du plan $z = 0$.

Si l'on ne suppose pas les points homologues situés sur une même génératrice, on trouve d'autres surfaces qui se déduisent par homographie de la surface à plan directeur représentée par les équations

$$y \cos \omega - x \sin \omega = ae^{m\omega}, \quad z = be^{p\omega}.$$

SÉANCE DU 4 NOVEMBRE 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. FOURET : *Sur les transformations homographiques qui laissent inaltérée une congruence linéaire.*

M. RAFFY : *Sur des déformations imaginaires de certaines surfaces.*

M. LAISANT fait la Communication suivante :

Note sur l'interpolation successive.

L'inconvénient des formules classiques d'interpolation, au point de vue des applications pratiques, réside dans la longueur des calculs qu'elles exigent, et dont quelques-uns sont parfois inutiles. Le but de cette Note est d'indiquer un procédé, plutôt qu'une formule nouvelle, qui permet, nous semble-t-il, d'abréger considérablement les opérations.

Supposons qu'une fonction d'une seule variable indépendante y , représentant, par exemple, un phénomène physique dont on se propose de trouver la loi, ait été déterminée pour n valeurs, $x_1, x_2, \dots, x_n$ de cette variable, et qu'elle prenne respectivement les valeurs correspondantes

$$y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Si, par l'une quelconque des méthodes et formules connues, on a obtenu une fonction u de x qui satisfait aux conditions ci-dessus, la loi cherchée est convenablement indiquée par la relation

$$(1) \quad y = u,$$

dans la limite des observations enregistrées.

La formule

$$y = u + (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)f(x),$$

et plus particulièrement

$$(2) \quad y = u + k(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

satisfera également aux conditions énumérées.

Soit maintenant qu'une observation ou une expérience nouvelle nous apprenne que, pour une nouvelle valeur x_{n+1} de la variable, la fonction doit prendre la valeur y_{n+1} . La formule (1), si l'on y remplaçait x par x_{n+1} , donnerait pour y une valeur u_{n+1} généralement différente. Donc, en écrivant la formule (2) après cette substitution, nous aurons

$$y_{n+1} = u_{n+1} + k(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \dots (x_{n+1} - x_n),$$

relation qui nous déterminera le coefficient k :

$$(3) \quad k = \frac{y_{n+1} - u_{n+1}}{(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \dots (x_{n+1} - x_n)}.$$

Cette détermination de k nous permet donc de passer de la formule (1) à la formule (2). On remarquera que le numérateur de k est la différence entre la valeur *observée* de la fonction, et sa valeur *calculée* par la formule (1).

En faisant tout d'abord $n = 2$, auquel cas la loi cherchée est représentée suffisamment par une relation linéaire, ou graphiquement par une droite, on voit qu'on pourra calculer de proche en proche des formules successives qui permettront de *serrer*, pour ainsi dire, de plus en plus près, le phénomène dont on veut représenter analytiquement la loi.

Dans le cas particulier remarquable où les valeurs de la variable se succèdent en progression arithmétique de raison h , comme dans la formule classique de Newton, on voit que la relation (3) devient

$$k = \frac{y_{n+1} - u_{n+1}}{n! h^n}.$$

Si la différence $y_{n+1} - u_{n+1}$, entre les valeurs observées et calculées, devient tellement faible que la valeur qui s'ensuivra pour

$$k(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

dans les limites intéressantes au point de vue du phénomène, soit inférieure aux erreurs physiques inévitables, on pourra supprimer ce terme, et la formule (1) conviendra alors à la représentation de la loi, même avec une observation de plus.

Comme exemple très simple, soit qu'aux temps 0, 1, 2, 3, 4 un mobile ait parcouru les espaces 7, 8, 11, 16, 23, successivement. D'après les deux premières observations, la loi du mouve-

ment est représentée par $y = 7 + t$. Écrivons

$$y = 7 + t + kt(t - 1),$$

et remplaçons y par 11, t par 2. Alors $2 = k \cdot 2 \cdot 1$, d'où $k = 1$ et $y = 7 + t^2$. Nous aurons alors

$$y = 7 + t^2 + k'(t(t - 1)(t - 2));$$

en remplaçant y par 16, t par 3, il s'ensuit $k' = 0$. Enfin écrivons

$$y = 7 + t^2 + k''t(t - 1)(t - 2)(t - 3);$$

les valeurs $y = 23$, $t = 4$ donnent $k'' = 0$. Par conséquent le mouvement observé est complètement représenté par la formule $y = 7 + t^2$.

M. D'OCAGNE en présentant son livre intitulé : *Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques* ⁽¹⁾, où il expose une théorie générale de la construction des Tableaux graphiques de calculs tout faits ou *abaques*, indique les particularités au point de vue mathématique de cet Ouvrage, écrit avant tout dans un but technique. Il croit pouvoir, notamment, signaler l'emploi, fait en vue d'un objet absolument *pratique*, des principes de *dualité* et d'*homographie* dont l'usage semblait jusqu'ici réservé aux recherches purement spéculatives.

Le premier de ces principes lui a permis de substituer, pour les équations qu'il appelle à *triple régleure*, aux abaques à *droites isoplèthes* des abaques à *points isoplèthes* qui, tout en étant aussi simples de construction, moyennant l'emploi des *coordonnées parallèles*, sont d'une lecture bien plus facile et se prêtent bien mieux aux interpolations à vue. Ils ont encore l'avantage, que ne présentent point les précédents, de permettre, dans certains cas, l'introduction de une, deux et trois nouvelles variables. On conçoit, en effet, qu'on puisse, au moyen d'un nouveau paramètre, faire varier l'un des systèmes de points isoplèthes en le représentant dans chacune de ses nouvelles positions. Pareille opération serait impossible avec les systèmes de droites isoplèthes, car la superposition sur une même feuille de ces divers systèmes produirait un enchevêtrement non seulement inextricable à l'œil, mais même matériellement irréalisable.

(1) Paris, Gauthier-Villars et fils, 1891.

Quant au principe d'homographie, il intervient utilement pour permettre de substituer à un abaque primitivement construit, où certaines courbes sont trop rapprochées ou coupées par certaines droites sous un angle trop petit, un autre abaque ne présentant pas ces inconvénients

SÉANCE DU 18 NOVEMBRE 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. Lemoine : *Sur la transformation continue.*

M. Fouret : *Sur les points singuliers des équations différentielles à deux variables, du premier ordre et du premier degré.*

M. Humbert : *Sur la surface desmique du quatrième ordre.*

M. Catalan adresse cinq Notes *Sur quelques théorèmes d'Analyse et d'Arithmétique.*

M. BICHE fait la Communication suivante :

Sur les surfaces réglées qui passent par une courbe et coupent sous un angle constant la développable des tangentes.

On sait que, si l'on considère les développables qui coupent sous un angle constant la développable des tangentes d'une courbe c , le lieu des génératrices de ces développables qui passent par un point de c est un cône du deuxième degré. Ce cône a pour plan principal le plan rectifiant; pour génératrices principales, la tangente et la droite rectifiante; les sections circulaires sont perpendiculaires à ces droites.

Pour qu'une droite liée invariablement au trièdre d'une courbe engendre une développable, il faut et il suffit que le cône, dont je viens de parler, soit de grandeur constante et que la droite soit sur ce cône. Si ces conditions sont réalisées, la courbe c est une hélice.

On peut généraliser ces résultats en considérant, au lieu des développables, des surfaces réglées qui auraient, tout le long de la courbe c , une courbure totale dont la valeur ne dépendrait que des

coordonnées du pied de chaque génératrice sur la courbe. Les développables correspondent au cas où cette courbure serait constamment nulle. Dans le cas plus général dont je viens de parler, on trouve les résultats suivants.

Le lieu des génératrices qui passent par un point de c et qui correspondent à des surfaces ayant en ce point même courbure totale se compose de deux cônes du deuxième degré Γ , Γ' . Ces cônes ont tous deux pour plan principal le plan rectifiant; ils contiennent tous deux la tangente à la courbe c , et les plans perpendiculaires à c les coupent l'un et l'autre suivant des cercles.

Les autres génératrices, situées dans le plan rectifiant, forment, avec la tangente et la droite rectifiante, un faisceau harmonique. Plus généralement : tout plan passant par la tangente coupe le cône des développables et les cônes Γ , Γ' , suivant des droites qui constituent, avec la tangente, un faisceau harmonique.

Si la valeur absolue de la courbure est égale au carré de la torsion, l'un des deux cônes, Γ ou Γ' , se réduit à un système de deux plans : le plan osculateur et le plan normal.

Pour qu'une droite, liée invariablement au trièdre, engendre une surface réglée, pour laquelle la courbure totale soit constante le long de la courbe c , il faut et il suffit qu'un des cônes soit de grandeur constante, et que la droite soit située sur ce cône. Si ces conditions sont réalisées, la courbe c est une courbe de M. Bertrand. La génératrice principale du cône, autre que la tangente, est la génératrice de la surface réglée qui admet c comme ligne de striction et qui est applicable sur un hyperboloïde de révolution; elle est parallèle à la binormale de la courbe conjuguée.

Si la courbe c est à torsion constante, le cône se réduit à deux plans.

Si la courbe c est à courbure constante, le cône se réduit à la tangente à cette courbe.

M. P. APPELL adresse la Note suivante :

Exemples de fonctions de plusieurs variables admettant un groupe de substitutions linéaires entières.

M. FUCHS a obtenu, par l'inversion des intégrales de certaines équations différentielles linéaires, des fonctions de deux variables

indépendantes x et y qui ne changent pas de valeur quand on remplace x et y par $ax + by + c$ et $a'x + b'y + c'$, a, b, c, a', b', c' désignant des constantes déterminées. Nous nous proposons de former directement, à l'aide de séries ou de produits infinis, des fonctions de cette nature n'ayant pas de singularités essentielles à distance finie : ces fonctions se rattachent aussi aux fonctions hyperfuchsienues de M. Picard.

1. Pour donner d'abord un exemple élémentaire, formons, avec des fonctions θ , une fonction méromorphe $f_n(x)$, doublement périodique de troisième espèce, vérifiant les deux relations

$$f_n(x + 2\pi i) = f_n(x), \quad f_n(x + 2a) = e^{-nx} f_n(x),$$

où a désigne une constante et n un entier positif, négatif ou nul. Si l'on considère la somme

$$\varphi(x, y) = \sum \Lambda_n e^{ny} f_n(x),$$

étendue à différentes valeurs de n , les lettres Λ_n désignant des constantes, cette somme définit une fonction $\varphi(x, y)$ vérifiant les relations

$$(1) \quad \varphi(x + 2\pi i, y) = \varphi(x, y + 2\pi i) = \varphi(x + 2a, y + x) = \varphi(x, y).$$

La fonction φ admet donc un groupe de substitutions linéaires entières.

2. Les fonctions précédentes sont des polynômes en e^x et e^{-x} ; voici des fonctions transcendentes en e^x vérifiant les mêmes relations (1). Soit a une constante dont la partie réelle est négative; posons

$$t_n = e^{an^2 + (x-a)n + y}, \quad \theta_n = e^{x + 2na},$$

et désignons par $R(t, \theta)$ une fonction rationnelle de t et θ , finie pour $t = 0$. Les expressions

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} t_n R(t_n, \theta_n), \\ \varphi(x, y) &= \prod_{n=-\infty}^{n=+\infty} [1 - t_n R(t_n, \theta_n)] \end{aligned}$$

définissent des fonctions vérifiant les relations (1). En effet, le

changement de x en $x + 2a$ et de y en $y + x$ change t_n en t_{n+1} et θ_n en θ_{n+1} . Quand $R(t, \theta)$ est un polynôme en t multiplié par une fonction rationnelle de θ , la première des expressions ci-dessus donne les fonctions du n° 1.

3. Nous terminerons en rattachant au même point de vue des fonctions de trois variables, dont nous avons indiqué la formation dans une Note insérée dans les *Annales de la Faculté de Marseille*, 1891 (1). Si l'on considère la fonction entière de x, y, z ,

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{an^4 + i \gamma n^3 + 6 \gamma n^2 + i z n},$$

et si l'on forme les fonctions

$$F(x, y, z) = \prod_{v=1}^{v=k} \frac{\varphi(x, y, z + \gamma_v)}{\varphi(x, y, z + \gamma'_v)},$$

$$F(x, y, z) = \sum_{v=1}^{v=k} \frac{\Lambda_v d \log \varphi(x, y, z + \gamma_v)}{dz},$$

où les constantes Λ_v ont une somme *nulle*, ainsi que les constantes $\gamma_v - \gamma'_v$, ces fonctions vérifient les relations

$$F\left(x + \frac{\pi i}{2}, y, z\right) = F\left(x, y + \frac{\pi i}{3}, z\right) = F\left(x, y, z + \frac{\pi i}{2}\right) \\ = F(x + a, y + 2x + a, z + 3x + 3y + a) = F(x, y, z).$$

Elles admettent donc un groupe de substitutions linéaires entières.

(1) Dans cette Note les constantes $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ doivent être supposées nulles.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur les points singuliers des équations différentielles à deux variables, du premier ordre et du premier degré; par
M. G. FOURET.

1. En rendant homogène, par l'introduction d'une troisième variable, une équation différentielle à deux variables, du premier ordre et du premier degré, on la met sous la forme

$$(1) \quad \begin{vmatrix} L & M & N \\ x & y & z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0,$$

L, M, N étant des fonctions homogènes, d'un même degré d'homogénéité, de x, y, z . Si l'on considère ces trois variables comme les coordonnées d'un point par rapport à un triangle de référence ABC, l'équation (1) définit un système de courbes que l'on peut appeler *courbes intégrales* de cette équation. Par un point quelconque du plan du triangle ABC passe une de ces courbes et une seule.

Il y a exception toutefois pour les points dont les coordonnées vérifient les équations

$$(2) \quad \frac{L}{x} = \frac{M}{y} = \frac{N}{z},$$

et que l'on appelle *points singuliers* de l'équation différentielle. Supposons que L, M et N soient des fonctions algébriques entières d'un même degré k , c'est-à-dire, suivant une dénomination employée par M. Poincaré (1), que l'équation différentielle soit de $k^{\text{ième}}$ dimension. Alors le nombre des points singuliers est $k^2 + k + 1$.

Cette proposition a déjà été démontrée par M. Darboux, dans

(1) *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré* (Rendiconti di Circolo matematico di Palermo, t. V, p. 161).

son beau *Mémoire sur les équations différentielles algébriques* (1).

On peut aussi l'établir très simplement à l'aide des considérations suivantes, qui présentent en elles-mêmes quelque intérêt.

2. Remarquons d'abord qu'une droite quelconque

$$(3) \quad Ax + By + Cz = 0$$

est touchée en k points par les courbes intégrales de l'équation (1). En effet, pour un pareil point, x, y, z, dx, dy, dz doivent vérifier simultanément les équations (1), (3) et

$$(4) \quad A dx + B dy + C dz = 0.$$

Mais l'équation (1) peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} L & M & AL + BM + CN \\ x & y & Ax + By + Cz \\ dx & dy & A dx + B dy + C dz \end{vmatrix} = 0$$

et se réduit, en vertu des équations (3) et (4), à

$$AL + BM + CN = 0.$$

Cette équation, de degré k , détermine, concurremment avec l'équation (3), les coordonnées de k points, qui sont les points de contact de la droite (3) avec les courbes intégrales. On voit ainsi que ces courbes forment un système dont les caractéristiques sont 1 et k .

3. De ce qui précède on conclut immédiatement que *le lieu des points de contact des tangentes menées d'un même point P aux courbes intégrales est de degré $k + 1$* ; car, par le point P, passe une de ces courbes, et toute droite issue de P est touchée par celles-ci en k points.

Il est d'ailleurs facile de former l'équation de ce lieu. Soient, en effet, a, b, c les coordonnées du point P. La figure montre

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*. 2^e série, t. II, p. 84.

Le même théorème, énoncé sous une forme un peu différente, est également démontré dans les *Leçons de Géométrie* de Clebsch et Lindemann (t. I, p. 1001).

immédiatement qu'entre ces coordonnées et celles du point de contact d'une tangente menée de P à l'une des courbes existent les relations

$$\frac{dx}{a-x} = \frac{dy}{b-y} = \frac{dz}{c-z}.$$

L'élimination de dx , dy , dz entre ces relations et l'équation (1) fournit l'équation du lieu sous la forme

$$(5) \quad \begin{vmatrix} L & M & N \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

On reconnaît là l'équation d'une courbe de degré $k+1$ qui passe par le point P. On voit de plus que *cette courbe passe par les points singuliers de l'équation différentielle (1)*; car son équation est évidemment vérifiée par les systèmes de valeurs de x, y, z , qui vérifient les équations (2).

4. Lorsque l'on fait varier le point P, et par conséquent a, b, c , de toutes les manières possibles, les courbes (5) varient en formant un réseau d'une espèce particulière, dont certaines propriétés intéressantes ont été signalées par Laguerre ⁽¹⁾. Si le point P se déplace sur une droite Δ , les courbes (5), correspondant aux diverses positions que prend alors ce point, forment un faisceau; car, les coordonnées a, b et c étant liées par une relation linéaire, l'équation (5) ne contient plus qu'un paramètre arbitraire au premier degré. Les courbes du faisceau ont en commun $(k+1)^2$ points, parmi lesquels se trouvent nécessairement les k points en lesquels la droite Δ est tangente à des courbes intégrales (1). Les k^2+k+1 autres sont les points singuliers de l'équation différentielle, dont le nombre se trouve ainsi déterminé.

5. Si l'on suppose $k=1$, l'équation (1) se réduit à l'équation différentielle de Jacobi. Les points singuliers, qui sont alors au nombre de trois, ne suffisent pas pour déterminer complètement l'ensemble des courbes intégrales. Il faut de plus connaître un

(1) *Sur certains réseaux singuliers formés par des courbes planes* (Bulletin de la Société mathématique, t. VI, p. 129 à 136).

certain rapport anharmonique. On peut alors, à l'aide de ces données, obtenir, en quelque sorte géométriquement, l'intégrale de l'équation de Jacobi, ainsi que je l'ai fait voir, il y a quelques années (1).

Dans l'hypothèse $k = 2$, les points singuliers, au nombre de sept, déterminent complètement, quand ils sont distincts, le système des courbes intégrales (2).

La connaissance de ces points permet alors, comme on va le voir, de construire géométriquement, d'une manière élégante, la tangente, en un point quelconque du plan, à la courbe intégrale qui y passe. Soit, en effet, Θ la tangente, en un point M , à une de ces courbes. Le lieu des points de contact des tangentes menées aux courbes intégrales par un point quelconque P de Θ est une cubique (art. 3), et les cubiques qui correspondent ainsi aux divers points P de Θ , forment un faisceau, c'est-à-dire ont neuf points communs, dont sept sont les points singuliers donnés, et les deux autres sont les points où les courbes intégrales touchent Θ . Or, par hypothèse, un de ces deux derniers points est le point M . L'autre, étant joint à M , donnera précisément la droite Θ . Ainsi, *étant donnés, dans un plan, sept points distincts, que l'on considère comme les points singuliers d'une équation différentielle du premier ordre, du premier degré et de seconde dimension, la tangente, en un point M quelconque du plan, à la courbe intégrale qui y passe, s'obtient en joignant ce point au neuvième point commun aux cubiques qui passent par M et par les sept points singuliers.*

6. J'ai indiqué, il y a quelques années, comment les relations de position des sept points singuliers permettent, dans certains cas, de prévoir la nature et la forme de l'intégrale (3). Je n'y reviendrai pas ici. Je rappellerai seulement, pour la généraliser, cette remarque immédiate qu'une équation différentielle

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 1693 et 1837.

(2) Lorsque k dépasse 2, les $k^2 + k + 1$ points singuliers ne sont pas indépendants les uns des autres, comme j'ai eu déjà l'occasion de le faire remarquer (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVI, p. 586).

(3) *Ibid.*

définissant un faisceau de coniques est de deuxième dimension et a pour points singuliers les quatre points communs à ces coniques et les trois points d'intersection de leurs couples de sécantes communes. Considérons de même le faisceau le plus général de courbes planes du $m^{\text{ième}}$ degré. Les points de contact de ces courbes avec une droite quelconque de leur plan étant, comme on sait, au nombre de $2(m-1)$, la dimension de l'équation différentielle de ce faisceau sera égale à ce nombre. Si du nombre total des points singuliers, égal à $4(m-1)^2 + 2(m-1) + 1$, on déduit le nombre m^2 des points communs aux courbes du faisceau, on obtient le nombre total des points doubles de l'ensemble de ces courbes, égal, comme on le sait d'ailleurs, à $3(m-1)^2$.

7. Je vais, pour terminer, donner un nouvel exemple du parti que l'on peut tirer des points singuliers d'une équation différentielle, pour l'intégration de cette équation. On connaît les propositions si remarquables données par M. Darboux, dans le Mémoire que j'ai déjà rappelé, d'après lesquelles, à l'aide d'un nombre suffisant d'intégrales particulières d'une équation différentielle, on peut obtenir l'intégrale générale.

La proposition suivante me paraît pouvoir être utilisée, dans la recherche de ces intégrales particulières : *Si une équation différentielle du premier degré et de $k^{\text{ième}}$ dimension a plus de $mk + n$ points sur une courbe algébrique du $m^{\text{ième}}$ ordre et de la $n^{\text{ième}}$ classe, elle admet cette courbe comme intégrale particulière.* C'est là une conséquence immédiate d'un théorème bien connu, consistant en ce que *les courbes d'un système, de caractéristiques μ et ν , touchent une courbe algébrique du $m^{\text{ième}}$ ordre et de la $n^{\text{ième}}$ classe en un nombre de points au plus égal à $m\nu + n\mu$.* Il suffit de supposer $\mu = 1$, $\nu = k$ et de remarquer que toute courbe passant par un point singulier du système est touchée en un point par une des courbes de ce système, pour en conclure la proposition énoncée.

Sur une transformation relative à la géométrie du triangle;
par M. E. LEMOINE.

J'ai donné au Congrès de Limoges (*Association française pour l'avancement des Sciences*, 1890) un grand nombre de formules se rapportant à la Géométrie du triangle. En appelant $a, b, c, A, B, C, r, r_a, r_b, r_c, R, p, \delta, \delta_a, \delta_b, \delta_c$ les trois côtés, les trois angles, les rayons des quatre cercles tangents aux trois côtés, le rayon du cercle circonscrit, le demi-périmètre et les quatre quantités, $4R + r, 4R - r_a, 4R - r_b, 4R - r_c$, on a, par exemple,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r\delta) = 2[(p - a)^2 + r_a\delta_a],$$

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = (\delta^2 - 2p^2)^2,$$

$$r_a^4 + r_b^4 + r_c^4 = [\delta_a^2 - 2(p - a)^2]^2,$$

$$\Sigma a^3 \cos A = \frac{4pr}{R} (p^2 - r\delta - 3R^2),$$

$$\Sigma a \cos^2 A = \delta - \frac{p^2(R - r)}{R^2},$$

$$-r \cos^2 A + r_c \cos^2 B + r_b \cos^2 C = \delta_a - \frac{(p - a)^2(R + r_a)}{R^2}, \quad \dots$$

L'emploi de ces formules facilite souvent la résolution de problèmes assez compliqués, et nous allons le montrer à propos de trois théorèmes qui, je crois, n'ont pas encore été remarqués.

THÉORÈME I. — *On donne deux cercles fixes de rayons R, r de centres O, o , tels qu'il y ait une infinité de triangles ABC inscrits au cercle de rayon R et circonscrits au cercle de rayon r ; le lieu des points de Lemoine K des triangles ABC est une ellipse.*

Posons $\rho = OK, \rho' = oK$; on sait que $\overline{Oo}^2 = d^2 = R(R - 2r)$.
On a

$$(1) \quad \rho^2 = R^2 - \frac{12R^2r^2p^2}{(p^2 - r\delta)^2},$$

$$(2) \quad \rho'^2 = 4Rr^2 \frac{p^2(R + r) - r\delta^2}{(p^2 - r\delta)^2}.$$

On établit facilement ces formules en se rappelant que si

$x, y, z; x_1, y_1, z_1$ sont les coordonnées normales absolues de deux points M et M', on a

$$\overline{MM'}^2 = -\frac{R}{pr} \Sigma a(y_1 - y)(z_1 - z),$$

en employant des identités du genre de celles dont nous venons de signaler l'utilité.

En éliminant p^2 entre les équations (1) et (2), on trouve

$$(3) \quad 1 = \frac{4r[(R+r)(R^2 - \varphi^2) - 3R\varphi'^2]}{3(R^2 - \varphi^2 + \varphi'^2)}.$$

C'est l'équation du lieu de K en coordonnées φ, φ', O et o étant les pôles.

Si nous prenons pour axe des x la droite Oo , pour axe des y la perpendiculaire élevée au milieu de Oo , l'abscisse de o étant $\frac{d}{2}$, on a

$$\varphi^2 = y^2 + (\tfrac{1}{2}d + x)^2, \quad \varphi'^2 = y^2 + (\tfrac{1}{2}d - x)^2;$$

substituant dans l'équation (3), on trouve, tous calculs faits,

$$4x^2(3R^2 - 2Rr + r^2) + 4y^2r^2 - 4dx(3R - r)(R + r) + d^2(3R^2 + 6Rr + r^2) = 0;$$

le lieu du point K est donc une ellipse.

Le carré du demi grand axe est dirigé suivant la direction de l'axe des y et a pour valeur

$$\frac{d^2r}{6(3R^2 - 2Rr + r^2)}.$$

Le demi petit axe a pour valeur

$$\frac{d^2r}{3R^2 - 2Rr + r^2}.$$

Si nous donnions au lieu de o le centre o_a du cercle ex-inscrit tangent à BC, on aurait de même

$$\begin{aligned} \varphi &= OK, & \varphi' &= o_a K, \\ \varphi^2 &= R^2 - \frac{12R^2r_a^2(p-a)^2}{[(p-a)^2 + r_a\delta_a]^2}, \\ \varphi'^2 &= 4Rr_a \frac{(p-a)^2(R-r_a) + r_a\delta_a^2}{[(p-a)^2 + r_a\delta_a]^2}; \end{aligned}$$

en éliminant $p - a$, on trouverait l'équation du lieu de K, qui est une hyperbole.

Cette hyperbole est équilatère si $R = 2r_a$.

THÉORÈME II. — *Avec les mêmes données le lieu du point de Gergonne du cercle inscrit du triangle ABC est une circonférence.*

Soit λ le point de Gergonne d'un des triangles ABC.

On trouvera, après quelques calculs,

$$\overline{OK}^2 = \varphi'^2 = \frac{r^2}{\delta^2} (\delta^2 - 3p^2),$$

$$\overline{OK}^2 = \varphi^2 = R^2 - \frac{(r(R+r))}{\delta^2} p^2;$$

éliminant p on trouve une circonférence.

Si l'on donnait, au lieu du cercle inscrit, le cercle ex-inscrit o_a tangent au côté BC, on trouverait encore une circonférence pour le lieu du point de Gergonne de ce cercle ex-inscrit.

THÉORÈME III. — *Le point de Nagel N décrit dans les mêmes conditions une circonférence.*

Il suffit, pour le voir, de calculer la distance NO du point N de Nagel au centre O du cercle circonscrit; on trouve

$$R - 2r,$$

expression remarquable en elle-même par sa simplicité.

La même méthode s'applique avec succès pour trouver les lieux, trop connus pour nous y arrêter, de l'orthocentre, du centre de gravité, etc.

Remarquons encore ce théorème, dont la démonstration est presque intuitive :

Si O et o sont donnés, les centres des cercles ex-inscrits à tous les triangles ABC décrivent la circonférence de rayon $2R$ et de centre O_2 sur Oo , tel que $oO_2 = 2oO$; si O et o_a sont donnés, les centres o, o_b, o_c des autres cercles tangents aux trois côtés d'un des triangles ABC décrivent la circonférence de rayon $2R$ et de centre O_{2a} sur Oo_a , tel que $o_aO_{2a} = 2o_aO$.

Sur la transformation continue; par M. E. LEMOINE.

A la séance du 15 juillet dernier, j'ai fait connaître ici un mode de transformation des formules du triangle et des théorèmes s'y rapportant, qui me paraît fécond et fort utile; voici de quelle idée cette transformation dérive.

Je suppose qu'un triangle ABC se transforme d'une façon continue par la rotation de CA autour du point C; on aura deux états de la figure :

1° Le point A est au-dessus de CB et y restera jusqu'à ce que, dans le mouvement de CA, il passe à l'infini sur AB.

2° Le point A, CA ayant continué son mouvement de rotation, est au-dessous de CB.

Soit une propriété quelconque de la première figure, propriété générale d'un triangle ABC, je la considère dans sa *continuité* et je vois qu'elle devient *souvent*, dans la deuxième figure, une propriété générale du triangle qui s'exprime autrement que la propriété générale considérée.

En effet, les éléments de ABC (premier état de la figure) changent souvent de nom par rapport à ABC du deuxième état; ainsi, par exemple, ce qui est le cercle inscrit au triangle ABC dans le premier état de la figure devient le cercle ex-inscrit tangent à BC dans le second état, etc.; il suit de là qu'un théorème où entrera le cercle inscrit donnera, par continuité, un autre théorème où entrera le cercle ex-inscrit tangent au côté BC. En étudiant la question, on reconnaît que :

Dans une formule générale relative au triangle, si l'on remplace les quantités $a, b, c, p, p-a, p-b, p-c, S, R, r, r_a, r_b, r_c, A, B, C, \dots$, respectivement par $a, -b, -c, -(p-a), -p, p-c, p-b, -S, -R, r_a, r, -r_c, -r_b, -A, \pi-B, \pi-C, \dots$, on obtient une nouvelle formule relative au triangle.

Je dirai que cette nouvelle formule dérive de la première par *transformation continue en A*; il y a évidemment de même les formules obtenues par transformation continue en B et en C.

Le mode de démonstration que nous venons d'indiquer, n'est

pas, si l'on veut une entière rigueur, sans présenter quelques points assez délicats à propos de la valeur des angles, lorsque le point A a passé à l'infini; il vaut mieux raisonner synthétiquement de la manière suivante; on verra de plus, par cette méthode, que la *transformation continue* n'est qu'un cas particulier, mais celui qui paraît le plus fécond, d'un système de transformation très général.

Toute formule M relative au triangle n'est, au fond, qu'une relation d'identité entre trois angles A, B, C dont la somme est égale à π ; car cette formule ne contient que ces angles et des éléments linéaires du triangle qui peuvent s'exprimer tous au moyen de ces angles et d'un élément linéaire arbitraire, lequel disparaît de la formule à cause de l'homogénéité.

Dans la formule M, je puis évidemment remplacer les angles A, B, C par trois autres, A', B', C', dont la somme soit π ; si je prends pour A', B', C' des fonctions de A, B, C, les éléments du triangle qui entrent dans la formule M deviennent d'autres éléments de ce triangle, et la nouvelle formule M donne une relation entre les nouveaux éléments.

Si je prends pour A', B', C' les angles $-\text{A}$, $\pi - \text{B}$, $\pi - \text{C}$, j'ai la transformation continue en A.

En effet, soit $\text{BC} = a$ l'élément linéaire qui reste fixe. La formule

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

donne

$$\frac{a}{\sin(-A)} = \frac{(\text{ce que devient } b)}{\sin(\pi - B)} = \frac{(\text{ce que devient } c)}{\sin(\pi - C)} = (\text{ce que devient } 2R);$$

donc b doit être changé en $-b$, c en $-c$, R en $-R$. La formule

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

donne

$$(\text{ce que devient } S) = \frac{1}{2} a(-b) \sin(\pi - C);$$

donc S doit être changé en $-S$,

Mais il est clair que j'aurai également une transformation par chaque système de valeurs que je prendrai pour A', B', C'; si je prends, par exemple, pour A', B', C' les valeurs $180 - \text{A}$, $90 - \text{B}$,

90 — C, avec α pour élément linéaire fixe, on pourra, dans toute formule relative au triangle, changer

$$a, b, c, R, S, A, B, C, \dots$$

respectivement en

$$a, 2R \cos B, 2R \cos C, R, 2R^2 \cos B \cos C \sin A,$$

$$\pi - A, \frac{\pi}{2} - B, \frac{\pi}{2} - C, \dots,$$

et l'on aura une nouvelle formule.

Mais ces transformations ne conduisent évidemment pas toutes à des résultats nouveaux simples et élégants, et c'est la transformation continue qui me paraît la plus féconde; elle montre le lien entre presque toutes les formules connues où entrent des éléments analogues, elle en donne de nouvelles, et, une formule étant établie, cette transformation indique la forme et fournit, sans recherche, la démonstration de formules analogues; ainsi la distance d entre le centre du cercle inscrit et celle du cercle circonscrit étant donnée par la formule $d^2 = R(R - 2r)$, celle du centre du cercle ex-inscrit o_a et du centre du cercle circonscrit sera

$$d_a^2 = R(R + 2r_a).$$

La distance oo_a étant $\frac{a}{\sin \frac{A}{2}}$, une transformation continue en A,

reproduirait le même résultat, mais la transformation continue en B donne $\frac{a}{\cos \frac{A}{2}}$ pour la distance $o_b o_c, \dots$

On démontre facilement :

1° Que, si les coordonnées normales d'un point M sont l, m, n , l, m, n désignant des fonctions des éléments du triangle, le transformé continu en A, M_a de M a pour coordonnées — l_a, m_a, n_a , l_a, m_a, n_a désignant ce que deviennent l, m, n quand on y fait la transformation continue en A.

Remarquons qu'un point simplement *marqué* sur le plan n'a pas de transformé continu; cela ne signifie plus rien, il faut qu'on donne la loi qui lie la position de M aux éléments du

triangle et il n'y a pas de construction *générale* pour passer d'un point à son transformé continu, d'une ligne à sa transformée continue.

2° Que, si $f(x, y, z, m, m', m'', \dots) = 0$ est l'équation d'une ligne, celle de sa transformée continue en Λ sera

$$f(-x, y, z, m_a, m'_a, m''_a, \dots) = 0,$$

m_a, m'_a, m''_a désignant ce que deviennent m, m', m'' par transformation continue.

3° Que, si λ, μ, ν sont les coordonnées barycentriques de M , celles de M_a seront λ_a, μ_a, ν_a ; que, si

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \mu, \mu', \mu'', \dots) = 0$$

est l'équation, en coordonnées barycentriques, d'une ligne, celle de sa transformée continue sera

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \mu_a, \mu'_a, \mu''_a, \dots) = 0.$$

4° Pour les coordonnées cartésiennes, les coordonnées de M étant X, Y , celles de M_a seront $X_a, -Y_a$; l'équation d'une ligne étant

$$f(X, Y, M, M', M'', \dots) = 0,$$

celle de sa transformée continue sera

$$f(X, -Y, M_a, M'_a, M''_a, \dots) = 0.$$

Remarquons encore que, au lieu de partir des angles pour une transformation, on pourrait aussi partir des lignes, et, par exemple, changer dans une formule a, b, c en des fonctions f_1, f_2, f_3 des éléments du triangle, puis déterminer les angles et les autres éléments en fonction de $f_1, f_2, f_3, \dots$; il faudrait que f_1, f_2, f_3 satisfissent aux conditions

$$f_1 < f_2 + f_3, \quad f_2 < f_3 + f_1, \quad f_3 < f_1 + f_2,$$

qui expriment que f_1, f_2, f_3 sont les côtés d'un triangle, mais cette transformation serait *ordinairement* plus compliquée.

Donnons, pour terminer, comme exemple de la transformation continue, quelques formules probablement nouvelles; il y en a de beaucoup plus simples, mais nous les avons déjà publiées ailleurs

à propos d'autres sujets; rappelons que, en plus des notations ordinaires, nous désignons les quantités $4R + r$, $4R - r$, $4R - r_b$, $4R - r_c$ par δ , δ_a , δ_b , δ_c . La formule

$$\Sigma a(r_b + r_c - r) = 2p(2R + r)$$

donne

$$\begin{aligned} & -a(r_b + r_c + r_a) + b(r_b + r_a - r) \\ & + c(r_c + r_a - r) = 2(p - a)(2R - r_a); \end{aligned}$$

$$\Sigma a(r_a - r)(r_b + r_c - 2r) = 2p(p^2 + r^2 - 10Rr)$$

donne

$$\begin{aligned} & -a(r_a - r)(r_b + r_c - 2r_a) \\ & + b(r_c + r_a)(2r_a + r_b - r) \\ & + c(r_b + r_a)(2r_a + r_c - r) = 2(p - a)[(p - a)^2 + r_a^2 + 10Rr_a]; \end{aligned}$$

$$\Sigma a(r_b - r)(r_c - r) = 4RS$$

donne

$$a(r_a + r_b)(r_a + r_c) - b(r_a - r)(r_a + r_b) - c(r_a - r)(r_a + r_c) = 4RS;$$

$$\Sigma a(r_a - r)[(r_b - r)^2 + (r_c - r)^2] = 4Rp(p^2 + r^2 - 12Rr)$$

donne

$$\begin{aligned} & -a(r_a - r)[(r_a + r_b)^2 + (r_a + r_c)^2] \\ & + b(r_a + r_c)[(r_a + r_b)^2 + (r_a - r)^2] \\ & + c(r_a + r_b)[(r_a + r_c)^2 + (r_a - r)^2] = 4R(p - a)[(p - a)^2 + r_a^2 + 12Rr_a]; \end{aligned}$$

$$\Sigma a^2 r_b r_c = 4pS(R + r)$$

donne

$$-a^2 r_b r_c + b^2 r r_b + c^2 r r_c = 4(p - a)S(R - r_a);$$

$$\Sigma r_a \cos^2 A = \delta - \frac{p^2(R - r)}{R^2}$$

donne

$$-r \cos^2 A + r_c \cos^2 B + r_b \cos^2 C = \delta_a - \frac{(p - a)^2(R + r_a)}{R^2};$$

$$\Sigma bcr_a \cos A = r(5p^2 - \delta^2)$$

donne

$$bcr \cos A - car_c \cos B - bar_b \cos C = r_a[5(p - a)^2 - \delta_a^2];$$

Appelons H l'orthocentre, O le centre du cercle inscrit, points qui ne changent pas par transformation continue; N , N_a , ... le

point de *Nagel* et ses transformés; λ , λ_a , ... le point de *Gergonne* et ses transformés.

$$\overline{H\lambda}^2 = 4R^2 - \frac{8R\rho^2(2R-r)}{\delta^2}$$

donne

$$\overline{H\lambda_a}^2 = 4R^2 - \frac{8R(p-a)^2(2R+r_a)}{\delta_a^2};$$

$$\overline{O\lambda}^2 = R^2 - \frac{4\rho S(R+r)}{\delta^2}$$

donne

$$\overline{O\lambda_a}^2 = R^2 + \frac{4(p-a)S(R-r_a)}{\delta_a^2};$$

$$\overline{o\lambda}^2 = r^2 - \frac{3S^2}{\delta^2}$$

donne

$$\overline{o_a\lambda_a}^2 = r_b^2 - \frac{3S^2}{\delta_a^2};$$

$$ON = R - 2r$$

donne

$$ON_a = R + 2r_a;$$

$$\overline{oN}^2 = p^2 + 5r^2 - 16Rr$$

donne

$$\overline{O_aN_a}^2 = (p-a)^2 + 5r_a^2 + 16Rr_a;$$

$$\overline{N\lambda}^2 = 16R \left[\frac{\rho^2(R+r)}{\delta^2} - r \right]$$

donne

$$\overline{N_a\lambda_a}^2 = 16R \left[\frac{(p-a)(R-r_a)}{\delta_a^2} + r_a \right], \quad \dots$$

Quelques remarques relatives aux fonctions réciproques;
par M. C.-A. LAISANT.

1. Une équation réciproque est, comme on le sait, celle dont le premier membre se compose d'un polynôme entier où les termes équidistants des extrêmes sont égaux. En appelant m le degré de ce polynôme $f(x)$, il s'ensuit que

$$(1) \quad f(x) = x^m f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Nous pouvons prendre cette relation (1) comme définition et appeler *fonction réciproque de degré m* toute fonction qui y satisfait.

On remarquera que ax^m peut toujours être regardée, en vertu de cette définition, comme une fonction réciproque de degré $2m$.

2. Si nous formons successivement les dérivées première et seconde des deux membres de l'équation (1), nous aurons

$$(2) \quad f'(x) = m x^{m-1} f\left(\frac{1}{x}\right) - x^{m-2} f'\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$(3) \quad \begin{cases} f''(x) = m(m-1)x^{m-2}f\left(\frac{1}{x}\right) \\ \quad - 2(m-1)x^{m-3}f'\left(\frac{1}{x}\right) + x^{m-4}f''\left(\frac{1}{x}\right). \end{cases}$$

Posons

$$(4) \quad \varphi(x) = (m-1)f'(x) - x f''(x).$$

Il viendra, en vertu des relations (2) et (3),

$$(5) \quad \begin{cases} \varphi(x) = (m-1)x^{m-2}f'\left(\frac{1}{x}\right) - x^{m-3}f''\left(\frac{1}{x}\right) \\ \quad = x^{m-2} \left[(m-1)f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}f''\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\ \quad = x^{m-2}\varphi\left(\frac{1}{x}\right). \end{cases}$$

Par conséquent, $f(x)$ étant réciproque de degré m , la fonction $z(x)$ ou $(m-1)f'(x) - x f''(x)$ est réciproque de degré $m-2$.

En appliquant ce résultat à la fonction $z(x)$ elle-même, on reconnaît sans peine que la fonction

$$(m-2)(m-3)f''(x) - 2(m-3)xf'''(x) + x^2 f^{(4)}(x)$$

est réciproque de degré $m-4$. De même, la fonction

$$(m-3)(m-4)(m-5)f'''(x) - 3(m-4)(m-5)xf^{(4)}(x) + 3(m-5)x^2 f^{(5)}(x) - x^3 f^{(6)}(x)$$

est réciproque de degré $m-6$, et il est facile de généraliser.

3. Les propriétés qui suivent sont pour ainsi dire évidentes, en vertu de l'équation de définition (1), et il suffira de les énoncer.

1° Si deux fonctions $f(x)$, $F(x)$ sont réciproques de même degré m , la fonction $Af(x) + BF(x)$, A et B étant deux constantes quelconques, est réciproque de même degré.

2° Si $f_1(x)$, $f_2(x)$ sont des fonctions réciproques de degrés m_1 et m_2 respectivement, la fonction $f_1(x) \times f_2(x)$ est réciproque de degré $m_1 + m_2$.

3° Dans la même hypothèse, la fonction $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ est réciproque de degré $m_1 - m_2$.

4° $f(x)$ étant une fonction réciproque de degré m , $[f(x)]^p$ est une fonction réciproque de degré mp .

4. D'après la définition adoptée ci-dessus, une fonction $f(x)$ est réciproque de degré zéro, quand on a

$$(6) \quad f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'autre part, nous pouvons écrire la relation (1) de définition sous la forme

$$\frac{f(x)}{x^{\frac{m}{2}}} = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{2}}}.$$

Par conséquent, si $f(x)$ est réciproque de degré m , la fonction $f(x) : x^{\frac{m}{2}}$ sera réciproque de degré zéro.

En écrivant $f(x) \propto f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(x)$ étant une fonction quelconque, on obtient nécessairement une fonction réciproque de degré zéro.

Il en est de même si l'on forme $f\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

Les propriétés du n° 2 ci-dessus se simplifient quand on considère des fonctions réciproques de degré zéro. La relation (4) nous donne, en effet,

$$-\varphi(x) = f'(x) + x f''(x).$$

Cette fonction est donc réciproque de degré -2 , lorsque $f(x)$ est réciproque de degré zéro; et, par suite,

$$x f'(x) + x^2 f''(x)$$

est réciproque de degré zéro.

On voit de même que

$$x^2 f''(x) + x^3 f'''(x) + \frac{x^4}{2 \cdot 3} f^{IV}(x),$$

$$x^3 f'''(x) + x^4 f^{IV}(x) + \frac{1}{4} x^5 f^V(x) + \frac{x^6}{3 \cdot 4 \cdot 5} f^{VI}(x)$$

sont également des fonctions réciproques de degré zéro.

En combinant ces trois fonctions par l'addition de la première et de la troisième, et la soustraction de la seconde, on a

$$x f'(x) + \frac{5}{6} x^4 f^{IV}(x) + \frac{1}{3} x^5 f^V(x) + \frac{1}{6 \cdot 9} x^6 f^{VI}(x),$$

qui jouit aussi de la même propriété.

Sur quelques théorèmes d'Analyse et d'Arithmétique;
par M. EUGÈNE CATALAN.

I. — Une formule de Cauchy.

1. Cette formule, bien remarquable ⁽¹⁾, est

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1+x)(1+tx)(1+t^2x) \dots (1+t^{n-1}x) \\ = 1 + \frac{1-t^n}{1-t} x + \frac{(1-t^n)(1-t^{n-1})}{(1-t)(1-t^2)} t x^2 + \dots + \frac{t^{n(n-1)/2}}{t^{n(n-1)/2}} x^n \end{array} \right. \quad (2).$$

On va voir qu'il est facile d'en faire une démonstration *directe*.

Dans le second membre, x^p a pour coefficient

$$T_{n,p} = \frac{(1-t^n)(1-t^{n-1}) \dots (1-t^{n-p+1})}{(1-t)(1-t^2) \dots (1-t^p)} t^{\frac{p(p-1)}{2}}.$$

Si l'on multiplie par $1 + t^n x$ les deux membres de l'égalité (1), ce coefficient devient $T_{n,p} + t^n T_{n,p-1}$.

La formule étant évidente quand $n = 1$, il faut donc, d'après le procédé classique, prouver que l'on a, *identiquement*,

$$(2) \quad T_{n+1,p} = T_{n,p} + t^n T_{n,p-1}.$$

Or, si l'on supprime le facteur commun

$$\frac{(1-t^n)(1-t^{n-1}) \dots (1-t^{n-p+1})}{(1-t)(1-t^2) \dots (1-t^p)},$$

cette égalité se réduit à

$$\frac{1-t^{n+1}}{1-t^{p+1}} t^{\frac{p(p-1)}{2}} = \frac{1-t^{n-p+1}}{1-t^p} t^{\frac{p(p-1)}{2}} + t^{n+\frac{(p-1)(p-2)}{2}};$$

puis, à

$$(1-t^{n+1})t^{p-1} = (1-t^{n-p+1})t^{p-1} + t^n(1-t^p);$$

ce qui est exact.

II. — Un théorème de Gauss.

2. Comme je l'ai fait observer à l'endroit cité ⁽³⁾, d'après la

⁽¹⁾ Je m'en suis occupé, déjà, dans les *Notes sur la théorie des fractions continues*,... et dans les *Lettres à quelques Mathématiciens*.

⁽²⁾ *Comptes rendus*, septembre 1873, p. 527.

⁽³⁾ *Lettres*,..., p. 19.

forme du premier membre, dans la formule de Cauchy, $T_{n,p}$ est un *polynôme entier*, fonction de t . D'ailleurs, $t^{\frac{p(p-1)}{2}}$ est une quantité première avec le dénominateur de $T_{n,p}$. En conséquence,

$$(3) \quad \frac{(1-t^n)(1-t^{n-1}) \dots (1-t^{n-p+1})}{(1-t)(1-t^2) \dots (1-t^p)} = \text{entier} \quad (1).$$

3. *Remarque I.* — Cette équation (3) constitue un beau théorème, dû à Gauss, ainsi que l'a constaté M. Perott (2).

Remarque II. — Le théorème de Gauss est cité dans l'*Algèbre* de M. J. Bertrand (première édition, p. 136). Cet Ouvrage est suivi des *Solutions des exercices*, données par G... et P.... A la page 356, on trouve une démonstration de l'égalité (3). Mais elle me semble inexacte. En effet, elle se réduit à établir l'existence d'une relation analogue à l'égalité (2), sans que l'on sache si *deux des trois* termes sont entiers (3).

III. — Une rectification.

4. A la page 99 des *Recherches sur quelques produits indéfinis*, la formule qui précède l'égalité (20), empruntée aux *Fundamenta*, a été mal *copiée*. Elle doit être lue ainsi

$$\frac{q}{1-q^2} + 2^3 \frac{q^2}{1-q^4} + 3^3 \frac{q^3}{1-q^6} + 4^3 \frac{q^4}{1-q^8} + \dots = \frac{k^2 \omega^4}{\pi^2}.$$

D'ailleurs, l'égalité (20) est la même chose que

$$q(1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \dots)^8 = \frac{k^2 \omega^4}{\pi^2}.$$

Donc la formule (378), *corrigée*, est

$$(378^{bis}) \quad q(1 + q + q^3 + q^6 + \dots)^8 = \frac{q}{1-q^2} + 2^3 \frac{q^2}{1-q^4} + 3^3 \frac{q^3}{1-q^6} + \dots;$$

(1) *Lettres...*, pp. 18 et 19. Elles contiennent quelques fautes typographiques.

(2) *Bulletin de la Société mathématique*, t. X, p. 87. La démonstration donnée par ce savant Professeur est plus *courte* que la nôtre; mais elle n'est pas *élémentaire*.

(3) Voir, sur ce point, la page 19 des *Lettres...* Faute d'avoir examiné suffisamment la page 356, j'avais admis cette *pseudo*-démonstration.

ou, ce qui revient au même,

$$(379) \quad (q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \dots)^8 = \frac{q^8}{1 - q^{16}} + 2^3 \frac{q^{16}}{1 - q^{32}} + 3^3 \frac{q^{24}}{1 - q^{48}} + \dots;$$

relation connue ⁽¹⁾.

IV. — *Autres séries elliptiques.*

§. On sait que

$$(4) \quad (q + q^9 + q^{25} + \dots)^4 = \frac{q^4}{1 - q^8} + 3 \frac{q^{12}}{1 - q^{24}} + 5 \frac{q^{20}}{1 - q^{40}} + \dots \quad (2).$$

Conséquemment,

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{q^4}{1 - q^8} + 3 \frac{q^{12}}{1 - q^{24}} + 5 \frac{q^{20}}{1 - q^{40}} + \dots \right]^2 \\ & = \frac{q^8}{1 - q^{16}} + 2^3 \frac{q^{16}}{1 - q^{32}} + 3^3 \frac{q^{24}}{1 - q^{48}} + \dots \quad (3); \end{aligned} \right.$$

ou, par le changement de q^4 en x ,

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{x}{1 - x^2} + 3 \frac{x^3}{1 - x^6} + 5 \frac{x^5}{1 - x^{10}} + 7 \frac{x^7}{1 - x^{14}} + \dots \right]^2 \\ & = \frac{x^2}{1 - x^4} + 2^3 \frac{x^4}{1 - x^8} + 3^3 \frac{x^6}{1 - x^{12}} + \dots \quad (4). \end{aligned} \right.$$

6. A la page 527 des *Comptes rendus* ⁽⁵⁾, l'illustre Cauchy donne cette autre formule, aussi importante que la première :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{(1 - x)(1 - tx) \dots (1 - t^{n-1}x)} \\ & = 1 + \frac{1 - t^n}{1 - t} x + \frac{(1 - t^n)(1 - t^{n+1})}{(1 - t)(1 - t^2)} x^2 + \dots \quad (6). \end{aligned} \right.$$

⁽¹⁾ LEGENDRE, t. III, p. 133.

⁽²⁾ *Recherches*..., p. 99.

⁽³⁾ *Ibid.*

⁽⁴⁾ Cette relation, qui me paraît remarquable, figure dans la page 100 des *Recherches*...; mais trop sommairement. Elle suppose, bien entendu, que le nombre x est inférieur à 1.

⁽⁵⁾ Septembre 1843.

⁽⁶⁾ Dans la série formant le second membre, les coefficients des puissances de x sont, d'après le théorème de Gauss (n° 3), des *polynômes entiers*.

Il en résulte, par le changement de x en $-x$,

$$(8) \quad \begin{cases} 1 \\ (1+x)(1+tx) \dots (1+t^{n-1}x) \\ = 1 - \frac{1-t^n}{1-t} x + \frac{(1-t^n)(1-t^{n+1})}{(1-t)(1-t^2)} x^2 - \dots \end{cases}$$

Comparant avec l'égalité (1), on a donc

$$(9) \quad \begin{cases} 1 = \left[1 + \frac{1-t^n}{1-t} x + \frac{(1-t^n)(1-t^{n-1})}{(1-t)(1-t^2)} tx^2 + \dots + t^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n \right] \\ \times \left[1 - \frac{1-t^n}{1-t} x + \frac{(1-t^n)(1-t^{n+1})}{(1-t)(1-t^2)} x^2 \right. \\ \left. - \frac{(1-t^n)(1-t^{n+1})(1-t^{n+2})}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} x^3 + \dots \right]; \end{cases}$$

et, si n devient infini,

$$(10) \quad \begin{cases} 1 = \left[1 + \frac{x}{1-t} + \frac{tx^2}{(1-t)(1-t^2)} + \frac{t^3x^3}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} + \dots \right] \\ \times \left[1 - \frac{x}{1-t} + \frac{x^2}{(1-t)(1-t^2)} - \frac{x^3}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} + \dots \right]. \end{cases}$$

7. Dans cette relation générale, supposons $t=x=q$. Elle devient

$$(11) \quad 1 = AB;$$

en posant, pour abrégér,

$$(12) \quad A = 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots,$$

$$(13) \quad B = 1 - \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)} - \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots$$

8. A la page 52 des *Recherches*, on trouve

$$(14) \quad A = B'C'.$$

en faisant

$$(15) \quad B' = 1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \dots,$$

$$(16) \quad C' = 1 + \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^{12}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \dots$$

De plus (1),

$$(15) \quad B' = \beta, \quad C' = \beta'.$$

La combinaison des égalités (11), (14) donne

$$(16) \quad 1 = BB'C';$$

ou, à cause des valeurs (15),

$$(17) \quad 1 = B\beta\beta'.$$

Mais, d'après Euler,

$$1 = \alpha\beta\beta' \quad (2);$$

donc

$$(18) \quad B = \alpha.$$

9. Si, dans une célèbre formule de Jacobi (3), on prend $\alpha = -1$, on trouve

$$(19) \quad \alpha = 1 - \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} - \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \dots$$

A cause de la *définition* (13) et de l'égalité (18), nous avons donc, finalement,

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} & 1 - \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)} - \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots \\ & = 1 - \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} - \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \dots \end{aligned} \right.$$

Ainsi, ces deux séries ont même limite (1).

V. — Théorème d'Arithmétique.

10. Reprenons la formule

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{x}{1-x^2} + 3 \frac{x^3}{1-x^6} + 5 \frac{x^5}{1-x^{10}} + \dots \right]^2 \\ & = \frac{x^2}{1-x^4} + 2^3 \frac{x^4}{1-x^8} + 3^3 \frac{x^6}{1-x^{12}} + \dots \end{aligned} \right.$$

(1) Même page.

(2) *Recherches*..., p. 2.

(3) *Fundamenta*, p. 180. Voir, aussi, les *Notes sur la théorie des fractions continues*..., p. 6.

(4) Les relations (18), (20) sont-elles *nouvelles*? Quoi qu'il en soit, elles *complètent*, pour ainsi dire, les théorèmes exprimés par les égalités (15).

Nous avons, en employant la notation d'Euler,

$$\frac{x}{1-x^2} + 3 \frac{x^3}{1-x^6} + 5 \frac{x^5}{1-x^{10}} + \dots = x + 4x^3 + 6x^5 + \dots + x^n \int n + \dots;$$

ou, pour abréger,

$$(21) \quad \frac{x}{1-x^2} + 3 \frac{x^3}{1-x^6} + 5 \frac{x^5}{1-x^{10}} + \dots = \sum_1^{\infty} x^n \int n,$$

n étant *impair*.

Dans le développement du premier membre de l'égalité (6), le coefficient de x^{2n} est donc

$$(22) \quad \int_1 \int (2n-1) + \int_3 \int (2n-3) + \dots + \int_{(2n-1)} \int_1 = S_{2n}.$$

D'autre part, le terme général du second membre est

$$\lambda^3 \frac{x^{2\lambda}}{1-x^{4\lambda}}.$$

Développé, ce terme devient

$$\lambda^3 [x^{2\lambda} + x^{6\lambda} + x^{10\lambda} + \dots + x^{2\mu\lambda} + \dots],$$

μ étant *impair*. Si donc

$$\lambda\mu = n,$$

on voit que λ, μ sont deux facteurs, *conjugués*, du nombre *impair* n . Par suite, le coefficient de x^{2n} , dans le second membre dont il s'agit, est $\sum \lambda^3$ (1). On a donc ce théorème :

n étant un nombre impair, on décompose $2n$, par voie d'addition, en

$$1 + (2n-1), \quad 3 + (2n-3), \quad 5 + (2n-5), \dots, (2n-1) + 1;$$

et l'on fait la somme, S_{2n} , des produits

$$\int_1 \int (2n-1), \quad \int_3 \int (2n-3), \quad \dots, \quad \int_{(2n-1)} \int_1.$$

D'autre part, on prend tous les diviseurs de n , savoir, $1, \dots, \lambda, \dots, n$; et l'on forme la somme $\sum \lambda^3$ de ces diviseurs.

Cela posé, les deux sommes sont égales.

(1) J'admetts la convergence de la série, facile à prouver.

11. *Application.* — Soit $n = 9$; d'où $\lambda = 1, 3, 9$. On a

$$\begin{aligned} S_{18} &= 2 \left[\int_1 \int_{17} + \int_3 \int_{15} + \int_5 \int_{13} + \int_7 \int_{11} \right] + \left[\int_9 \right]^2 \\ &= 2[1.18 + 4.24 + 6.14 + 8.12] + 13^2 = 588 + 169 = 757. \end{aligned}$$

Cette somme doit égaler $1^3 + 3^3 + 9^3 = 1 + 27 + 729$; ce qui est vrai.

12. *Remarque.* — Si le nombre n est *premier*, les seules valeurs de λ sont 1 et n . Donc, dans ce cas particulier,

$$(23) \quad S_{2n} = 1 + n^3 \quad (1).$$

Liège, septembre 1891.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 2 DÉCEMBRE 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. Carvallo : *Sur la résolution numérique des équations.*

M. Fouret présente quelques observations à ce sujet.

M. Raffy : *Sur certaines surfaces dont les rayons de courbure sont liés par une relation.*

M. F. Lucas : *Sur les équations qui représentent le régime des machines.*

M. Antomari adresse une Note *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles.*

SÉANCE DU 16 DÉCEMBRE 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Démission : M. Paturet adresse sa démission de membre de la Société.

(1) Le théorème précédent, qui n'est pas nouveau (*Recherches...*, p. 100), me paraît curieux. Il serait difficile peut-être de le démontrer *directement*.

Élections : M. de Fontviolant, présenté par MM. Rouché et de Comberousse; M. Blutel, présenté par MM. F. Lucas et Bioche, sont élus à l'unanimité.

Communications :

M. Hermann : *Sur un nouveau système de Cryptographie.*

M. Carvallo : *Démonstration d'un théorème de similitude sur les fonctions des machines*, signalé par M. F. Lucas.

M. Fouret : *Démonstration du théorème de Budan-Fourier.*

M. D. André présente quelques observations à ce sujet.

M. FÉLIX LUCAS fait la Communication suivante :

Sur les équations abstraites du fonctionnement des machines.

Dans ma Communication verbale, faite pendant la dernière séance, j'ai considéré une dynamo à courants alternatifs, avec induit sans fer, dont la force électromotrice est sinusoïdale, et j'ai montré que les lois moyennes de son fonctionnement en régime normal peuvent être représentées, aux échelles près, par des équations simplement numériques, dans lesquelles toutes les dimensions concrètes de la machine se trouvent éliminées.

Notre savant collègue, M. Carvallo, a montré que l'existence de ces équations abstraites ou canoniques résulte du principe de l'homogénéité concrète relativement aux trois unités fondamentales : longueur, masse et temps.

Au lieu de considérer l'intensité moyenne du courant en régime permanent, je vais considérer l'intensité réelle, périodiquement variable en fonction du temps.

Soient

R la résistance totale du circuit, comprenant la résistance intérieure de la machine et la résistance extérieure supposée non inductive;

L le coefficient de self-induction de l'induit;

E la force électromotrice variable déterminée en fonction du temps t par l'équation

$$(1) \quad E = E_0 \sin \frac{2\pi t}{T},$$

dans laquelle T représente la durée de la période.

L'intensité I du courant à l'instant t sera déterminée par l'équation différentielle

$$(2) \quad RI + L \frac{dI}{dt} - E_0 \sin \frac{2\pi t}{T} = 0.$$

Admettons *a priori* que l'équation finie entre I et t puisse se ramener à une équation abstraite et cherchons à quelles conséquences nous conduira cette hypothèse. Il est clair, d'abord, que cette équation abstraite, devant s'appliquer au cas particulier où l'on aurait $L = 0$, devra être $y = \sin x$. Remarquons, d'ailleurs, que l'équation (1), qui donne la force électromotrice, contient implicitement, comme donnée concrète, le choix particulier de l'origine du temps t , origine qui est prise de manière que le maximum E_0 de la force électromotrice se produise pour $t = \frac{T}{4}$; cette donnée concrète s'est introduite dans l'équation (2), dont le premier membre contient $-E$; il nous serait impossible de l'éliminer si nous remplacions t par une variable x qui lui serait proportionnelle et s'annulerait avec lui; c'est par une expression de la forme $ax + b$ qu'il faut nécessairement remplacer t pour arriver à une équation abstraite.

Posons

$$(3) \quad \begin{cases} t = \frac{T}{2\pi} x + \theta, \\ I = \frac{E_0}{R} \cos \frac{2\pi\theta}{T} y, \end{cases}$$

d'où

$$(4) \quad \frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi E_0}{RT} \cos \frac{2\pi\theta}{T} \frac{dy}{dx},$$

et substituons dans (2); nous trouverons

$$(5) \quad y - \sin x + \frac{2\pi L}{RT} \frac{dy}{dx} - \tan \frac{2\pi\theta}{T} \cos x = 0.$$

Il est clair que cette équation différentielle s'identifiera avec l'équation finie $y = \sin x$, si nous disposons du paramètre arbitraire θ de manière que l'on ait

$$(6) \quad \tan \frac{2\pi\theta}{T} = \frac{2\pi L}{RT}.$$

L'hypothèse que nous avons faite *a priori* se trouve, par con-

séquent, justifiée; la relation finie entre I et t peut se ramener à la forme abstraite

$$(7) \quad y = \sin x$$

au moyen des formules (3) et (6); cette relation finie concrète est elle-même

$$(8) \quad I = \frac{E_0}{R} \cos \frac{2\pi\theta}{T} \sin \frac{2\pi(t-\theta)}{T};$$

nous avons donc obtenu par une voie très simple l'intégrale de l'équation différentielle (2).

On pourrait objecter que $y = \sin x$ n'est pas l'intégrale générale de l'équation (5) accompagnée de l'équation de condition (6); on a, en effet, rigoureusement

$$(9) \quad y - \sin x - \frac{d(y - \sin x)}{dx} \tan \frac{2\pi\theta}{T} = 0,$$

équation dont l'intégrale générale est

$$(10) \quad y = \sin x + C e^{-x \tan \frac{2\pi\theta}{T}};$$

mais comme x et $\tan \frac{2\pi\theta}{T}$ sont deux nombres positifs dont le premier croît indéfiniment, le second terme du second membre est évanescent et doit être négligé dans la pratique.

Remarques sur l'intégration des équations aux dérivées partielles; par M. X. ANTONARI.

Étant donnée une équation aux dérivées partielles du premier ordre à trois variables

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

la méthode de Lagrange et Charpit pour trouver une intégrale complète de cette équation consiste, comme l'on sait, à adjoindre à l'équation proposée une autre équation

$$(2) \quad \Phi(x, y, z, p, q) = 0,$$

telle que, si l'on tire p et q des équations (1) et (2), l'équation

$$dz = p \, dx + q \, dy$$

soit complètement intégrable.

Si l'on pose

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = Z, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = Q,$$

on trouve que Φ doit vérifier la relation

$$(3) \quad P \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (Pp + Qq) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - (X + pZ) \frac{\partial \Phi}{\partial p} - (Y + qZ) \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0.$$

Pour que la relation d'intégrabilité soit satisfaite, il suffit que l'équation (3) soit satisfaite en tenant compte des équations (1) et (2). Il est clair que la condition d'intégrabilité sera satisfaite *a fortiori* si l'équation (3) est vérifiée identiquement.

La fonction F est une intégrale de cette équation. Supposons que Φ soit une autre intégrale; les deux équations

$$F = 0, \quad \Phi - a = 0,$$

où a désigne une constante arbitraire, déterminent les fonctions p et q d' x , d' y et de z , telles que l'équation

$$(4) \quad dz = p dx + q dy$$

soit complètement intégrable, pourvu que F et Φ soient des fonctions distinctes de p et q .

L'intégration de l'équation (4) introduira une nouvelle constante arbitraire b et la fonction z d' x et d' y , ainsi définie, sera une intégrale complète de l'équation proposée.

D'après cela on voit que, pour trouver une intégrale complète de l'équation (1), il faut non seulement trouver une intégrale $\Phi - a = 0$ de l'équation (3), mais aussi pouvoir résoudre les équations $F = 0$ et $\Phi - a = 0$ par rapport à p et à q .

Je me propose de montrer dans cette Note que l'on peut, dans certains cas faciles à prévoir, simplifier la recherche d'une intégrale complète en modifiant légèrement la méthode de Lagrange et Charpit.

Je reprends l'équation (1) et je suppose que l'on puisse, n'importe comment, exprimer p et q en fonction d' x , d' y , de z et d'un paramètre λ . Soient

$$(5) \quad p = \varphi(x, y, z, \lambda), \quad q = \psi(x, y, z, \lambda).$$

Dans ces formules je considère λ comme une fonction d' x , d' y

et de z et je détermine cette fonction par la condition que l'équation (4) soit complètement intégrable. La condition d'intégrabilité est

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \left[\frac{\partial \lambda}{\partial y} + q \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right] = \frac{\partial \psi}{\partial x} + p \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x} + p \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right]$$

et s'écrit, en tenant compte des équations (5)

$$(6) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \left[\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right] + \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Soit

$$\lambda = \theta(x, y, z, \alpha)$$

une intégrale de cette équation renfermant une constante arbitraire; en portant dans les équations (5), on a des valeurs de p et de q contenant une constante arbitraire, et telles que (4) soit intégrable. L'intégration de cette équation introduira une nouvelle constante arbitraire et la fonction z d' x et d' y , ainsi déterminée, sera une intégrale complète de l'équation proposée.

Il est bon d'observer que l'équation (6) se simplifie si l'on suppose que l'équation (1) soit indépendante de z , car alors on peut supposer que λ ne dépend que de x et de y et l'équation (6) devient

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Remarquons aussi que l'on pourra, dans certains cas, se dispenser de recourir à l'équation (6), si l'on aperçoit pour λ une valeur conduisant à une combinaison intégrable.

Voici d'ailleurs des cas dans lesquels on pourra appliquer la méthode de Lagrange ainsi modifiée.

Je reprends l'équation (1)

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

et je suppose que l'on y considère x, y, z comme fixes, p et q comme les coordonnées cartésiennes d'un point dans le plan, de sorte que l'équation représente alors une courbe de ce plan. On pourra appliquer la méthode toutes les fois que l'on pourra exprimer les coordonnées d'un point de cette courbe en fonction d'un paramètre. Il en sera ainsi, en particulier, dans le cas où la courbe serait unicursale.

Je vais appliquer à deux exemples :

PREMIER EXEMPLE. — *Trouver toutes les surfaces dont les normales sont divisées en parties proportionnelles par les trois plans coordonnés.*

Les équations d'une normale à l'une de ces surfaces sont

$$X - x + p(Z - z) = 0, \quad Y - y + q(Z - z) = 0.$$

En faisant $X = 0$ dans la première, et $Y = 0$ dans la deuxième, on en déduit

$$Z = \frac{x + pz}{p}, \quad Z = \frac{y + qz}{q};$$

et il suffit évidemment d'exprimer que le rapport de ces valeurs de z est constant, ce qui donne

$$q(x + pz) = p(y + qz)k$$

ou

$$(k-1)pqz + kpy - qx = 0.$$

Si λ désigne un paramètre, cette équation est satisfaite identiquement si l'on prend

$$(k-1)z p - x = k\lambda x,$$

$$(k-1)z q + ky = -\frac{y}{\lambda}.$$

Si l'on suppose $\lambda = \text{const.}$, on obtient immédiatement une combinaison intégrable

$$(k-1)z dz - x dx + ky dy = k\lambda x dx - \frac{y dy}{\lambda}.$$

ou bien

$$(1 + k\lambda)x dx - \frac{1 + k\lambda}{\lambda} y dy - (k-1)z dz = 0,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$(1 + k\lambda)x^2 - \frac{1 + k\lambda}{\lambda} y^2 - (k-1)z^2 = a.$$

On met aisément cette équation sous la forme

$$\frac{x^2}{k\lambda + \sigma} + \frac{y^2}{\lambda + \sigma} - \frac{z^2}{\sigma} - 1 = 0.$$

DEUXIÈME EXEMPLE. — *Trouver toutes les surfaces telles que, si l'on prend le symétrique par rapport à l'origine du pied de la normale sur le plan des xy , le point ainsi obtenu soit situé sur la trace du plan tangent sur le plan des xy .*

On obtient facilement l'équation

$$z(p^2 + q^2) + 2px + 2qy - z = 0,$$

que l'on peut écrire

$$(pz + x)^2 + (qz + y)^2 = (x^2 + y^2 + z^2).$$

Sous cette forme elle est satisfaite, identiquement, en posant

$$pz + x = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cos \varphi,$$

$$qz + y = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sin \varphi.$$

Si l'on suppose que φ soit un angle constant, on obtient une combinaison intégrable

$$z dz + x dx + y dy = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (\cos \varphi dx + \sin \varphi dy).$$

On en déduit

$$\frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos \varphi dx + \sin \varphi dy,$$

et, finalement, l'intégrale complète

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x \cos \varphi + y \sin \varphi + h)^2$$

Ces deux exemples m'ont été communiqués par M. Kœnigs.

Sur certaines surfaces dont les rayons de courbure sont liés par une relation; par M. L. RAFFY.

1. L'hélicoïde le plus général est représenté par les formules

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega, \quad z = \varphi(\rho) + h\omega,$$

d'où l'on déduit, en appelant R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux, les deux relations

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{\rho^3 \varphi' \varphi'' - h^2}{[\rho^2(1 + \varphi'^2) + h^2]^2},$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\rho(\rho^2 + h^2)\varphi'' + [\rho^2(1 + \varphi'^2) + 2h^2]\varphi'}{[\rho^2(1 + \varphi'^2) + h^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

On voit que les deux rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre. On sait, d'autre part, que tous les hélicoïdes

sont applicables sur des surfaces de révolution et que ces deux mêmes propriétés appartiennent aussi aux surfaces à courbure totale constante. Nous allons montrer que, réciproquement, toute surface applicable sur une surface de révolution, et dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre, est un hélicoïde ou une surface à courbure totale constante, sauf dans un cas particulier qui sera spécifié (n° 7).

2. Pour exprimer que les deux rayons R_1 et R_2 sont fonctions l'un de l'autre, on peut écrire qu'il existe une relation entre leur somme et leur produit, ou encore entre la courbure moyenne et la courbure totale. Si cette relation ne contient pas la courbure moyenne, la courbure totale est constante. Ce cas signalé et écarté, nous pourrions dire que $R_1 + R_2$ est une fonction de $R_1 R_2$. Or l'élément linéaire de toute surface applicable sur une surface de révolution peut toujours être ramené à la forme

$$ds^2 = W^2(du^2 + dv^2),$$

où W désigne une fonction de v seulement; la courbure totale ne dépend alors que de v . Nous devons donc supposer qu'il en est de même de la courbure moyenne.

Rappelons maintenant les formules de Codazzi. L'élément linéaire étant

$$ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2,$$

les rotations du trièdre formé par la normale à la surface et les tangentes aux courbes coordonnées satisfont aux six équations

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} Aq_1 + Cp = 0, & \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = qr_1 - rq_1, \\ -r = \frac{1}{C} \frac{\partial A}{\partial v}, & \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} = rp_1 - pr_1, \\ r_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial C}{\partial u}, & \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = pq_1 - qp_1; \end{array} \right. \quad (2)$$

on a de plus

$$(3) \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{Ap_1 - Cq}{AC}.$$

3. Introduisons dans les relations (1) et (3) la double hypothèse $\Lambda = C = W$; il viendra

$$(1)' \quad q_1 + p = 0, \quad r = -\frac{W'}{W}, \quad r_1 = 0,$$

$$(4) \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{p_1 - q}{W}.$$

Ainsi, la différence $p_1 - q$ est une fonction de v seulement; appelons-la $2V_0$ et posons

$$(5) \quad p_1 = \mu + V_0, \quad q = \mu - V_0,$$

en désignant par μ une fonction inconnue de u et de v . Nous avons maintenant à intégrer les équations (2), qui peuvent s'écrire

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial \mu}{\partial u} = pr, \\ \frac{\partial \mu}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial u} = \mu r + V_0 r + V_0', \\ p^2 + \mu^2 = V_0^2 - \frac{dr}{dv}. \end{cases}$$

On est donc conduit à faire un dernier changement de fonction

$$(7) \quad p = V_1 \cos \tau, \quad \mu = V_1 \sin \tau,$$

en posant, pour abréger,

$$(8) \quad V_1 = \sqrt{V_0^2 - \frac{dr}{dv}} = \frac{\sqrt{V_0^2 W^2 - W'^2 + W W''}}{W}.$$

Avec ces notations, le système (6), dont la dernière équation est vérifiée, se réduit aux deux suivantes

$$\begin{cases} \cos \tau \frac{\partial \tau}{\partial u} + \sin \tau \frac{\partial \tau}{\partial v} = \frac{V_1' - V_1 r}{V_1} \cos \tau, \\ \sin \tau \frac{\partial \tau}{\partial u} - \cos \tau \frac{\partial \tau}{\partial v} = \frac{V_1' - V_1 r}{V_1} \sin \tau - \frac{V_0' + V_0 r}{V_1}, \end{cases}$$

si l'on écarte provisoirement l'hypothèse particulière $V_1 = 0$. On déduit de là

$$(9) \quad \begin{cases} -\frac{\partial \tau}{\partial u} = \frac{V_0' + V_0 r}{V_1} \sin \tau - \frac{V_1' - V_1 r}{V_1}, \\ \frac{\partial \tau}{\partial v} = \frac{V_0' + V_0 r}{V_1} \cos \tau; \end{cases}$$

d'où, égalant les deux expressions de τ''_m , on conclut

$$(10) \quad \begin{cases} \left(\frac{V'_0 + V_0 r}{V_1} \right)^2 - \frac{d}{dv} \frac{V'_1 - V_1 r}{V_1} \\ = \left[\frac{V'_0 + V_0 r}{V_1} \frac{V'_1 - V_1 r}{V_1} - \frac{d}{dv} \frac{V'_0 + V_0 r}{V_1} \right] \sin \tau. \end{cases}$$

Nous avons ici deux cas à distinguer suivant que l'équation (10) détermine $\sin \tau$ ou se réduit à une identité.

4. PREMIER CAS. — L'équation (10) détermine $\sin \tau$. Alors τ est une fonction de la seule variable v ; en vertu des formules (7), (5) et (1)', les six rotations p, q, r, p_1, q_1, r_1 ne dépendent également que de v . Nous allons prouver que :

Si une surface a pour élément linéaire

$$ds^2 = W^2(du^2 + dv^2),$$

W désignant une fonction de v , et si les rotations du trièdre dont deux arêtes sont les tangentes aux courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ ne dépendent que de v , cette surface est un hélicoïde.

En effet, les rotations ne dépendant que de v , les formules de Codazzi (second groupe) deviennent

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dv} = qr_1 - rq_1, \\ \frac{dq}{dv} = rp_1 - pr_1, \\ \frac{dr}{dv} = pq_1 - qp_1. \end{cases}$$

On en déduit (1')

$$p^2 + q^2 + r^2 = \text{const.} = l^2,$$

et les trois angles d'Euler peuvent s'exprimer comme suit :

$$-\sin \theta \sin \varphi = \frac{p}{l}, \quad -\sin \theta \cos \varphi = \frac{q}{l}, \quad \cos \theta = \frac{r}{l}, \quad \psi = V - lu,$$

V représentant l'intégrale

$$-l \int \frac{pp_1 + qq_1}{l^2 - r^2} dv.$$

(1) DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. I, p. 52.

Les neuf cosinus des trois arêtes du trièdre sont donc connus par les formules d'Euler. Les coordonnées X, Y, Z des points de la surface s'expriment au moyen de ces neuf cosinus et des translations par les formules

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= a\xi + b\tau_1, & \frac{\partial Y}{\partial u} &= a'\xi + b'\tau_1, & \frac{\partial Z}{\partial u} &= a''\xi + b''\tau_1, \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= a\xi_1 + b\tau_{11}, & \frac{\partial Y}{\partial v} &= a'\xi_1 + b'\tau_{11}, & \frac{\partial Z}{\partial v} &= a''\xi_1 + b''\tau_{11}. \end{aligned}$$

Mais, d'après les hypothèses faites sur l'élément linéaire et sur le trièdre, on a

$$\xi = W, \quad \xi_1 = \tau_1 = 0, \quad \tau_{11} = W;$$

en sorte qu'il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= aW, & \frac{\partial Y}{\partial u} &= a'W, & \frac{\partial Z}{\partial u} &= a''W, \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= bW, & \frac{\partial Y}{\partial v} &= b'W, & \frac{\partial Z}{\partial v} &= b''W. \end{aligned}$$

Enfin rappelons que, en vertu de nos hypothèses, les formules de Codazzi (premier groupe) deviennent

$$(1)' \quad q_1 + p = 0, \quad r = -\frac{1}{W}W', \quad r_1 = 0;$$

par suite, la première des relations (2)' donne

$$Wp = \text{const.} = hl^2.$$

§. Cela posé, reportons-nous aux formules d'Euler

$$\begin{aligned} a &= \cos \theta \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi, \\ b &= \cos \theta \cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi, \\ c &= \sin \theta \sin \psi, \\ a' &= \cos \theta \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi, \\ b' &= \cos \theta \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi, \\ c' &= \sin \theta \cos \psi, \\ -a'' &= \sin \theta \sin \varphi, \\ -b'' &= \sin \theta \cos \varphi, \\ c'' &= \cos \theta, \end{aligned}$$

et remplaçons-y les angles θ , φ , ψ par leurs expressions données

plus haut. Nous trouvons

$$\begin{aligned} a &= V_1 \cos lu - V_2 \sin lu, & b &= V_3 \cos lu - V_4 \sin lu, \\ a' &= V_2 \cos lu + V_1 \sin lu, & b' &= V_4 \cos lu + V_3 \sin lu, \\ a'' &= \frac{p}{l}, & b'' &= \frac{q}{l}, \end{aligned}$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{pr \sin V}{l\sqrt{p^2 + q^2}} + \frac{q \cos V}{\sqrt{p^2 + q^2}}, & V_2 &= \frac{pr \cos V}{l\sqrt{p^2 + q^2}} - \frac{q \sin V}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \\ V_3 &= \frac{qr \sin V}{l\sqrt{p^2 + q^2}} - \frac{p \cos V}{\sqrt{p^2 + q^2}}, & V_4 &= \frac{qr \cos V}{l\sqrt{p^2 + q^2}} + \frac{p \sin V}{\sqrt{p^2 + q^2}}. \end{aligned}$$

Nous connaissons maintenant les différentielles totales des trois coordonnées

$$\begin{aligned} dX &= W(V_1 \cos lu - V_2 \sin lu) du + W(V_3 \cos lu - V_4 \sin lu) dv, \\ dY &= W(V_2 \cos lu + V_1 \sin lu) du + W(V_4 \cos lu + V_3 \sin lu) dv, \\ dZ &= \frac{W}{l} (p du + q dv) = hl du + \frac{Wq}{l} dv. \end{aligned}$$

L'intégration donne, en négligeant des constantes additives,

$$\begin{aligned} X &= \frac{WV_1}{l} \sin lu + \frac{WV_2}{l} \cos lu, \\ Y &= \frac{WV_2}{l} \sin lu - \frac{WV_1}{l} \cos lu, \\ Z &= hlu + \frac{1}{l} \int Wq dv. \end{aligned}$$

Ces formules peuvent s'écrire, en désignant par W_0, W_1, W_2 trois fonctions de v ,

$$X = W_0 \cos(W_1 + lu), \quad Y = W_0 \sin(W_1 + lu), \quad Z = h(W_1 + lu) + W_2;$$

elles représentent des hélicoïdes, qui dépendent de deux paramètres h et l , conformément au théorème de Bour.

6. *Remarque.* — Nous avons négligé (n° 3) l'hypothèse

$$(11) \quad V_0^2 = \frac{dr}{dv},$$

qui, en vertu des équations (6), entraîne

$$(12) \quad \begin{aligned} p &= \mu = 0, \\ V'_0 + V_0 r &= 0. \end{aligned}$$

Comme r , d'après les formules (1), est égal à la dérivée logarithmique, changée de signe, de W , cette dernière relation montre que V_0 est proportionnel à W , ou, à cause de l'équation (4), que la courbure moyenne est une constante $\frac{1}{k}$. La fonction W est d'ailleurs déterminée par l'équation du second ordre

$$\frac{W^2}{k^2} + \frac{d}{dv} \frac{W'}{W} = 0,$$

qui résulte des équations (11) et (12), et qu'il serait facile d'intégrer. Mais cette équation exprime que la courbure totale est constante et égale à $\frac{1}{k^2}$. Ainsi les deux rayons principaux sont égaux. L'hypothèse négligée ne donnerait donc que des sphères.

7. SECOND CAS. — *L'équation (10) est une identité.* — Nous supposons nuls le premier membre et le coefficient de $\sin \tau$. Les deux équations ainsi obtenues

$$(13) \quad \left(\frac{V'_0 + V_0 r}{V_1} \right)^2 - \frac{d}{dv} \frac{V'_1 - V_1 r}{V_1} = 0,$$

$$(14) \quad \frac{V'_0 + V_0 r}{V_1} \frac{V'_1 - V_1 r}{V_1} - \frac{d}{dv} \frac{V'_0 + V_0 r}{V_1} = 0,$$

déterminent à la fois les fonctions V_0 et W et, par suite, l'élément linéaire proposé. Les surfaces de révolution qui admettent cet élément linéaire ne sont plus, comme dans le premier cas, engendrées par une méridienne arbitraire. Néanmoins il convient de faire voir que les surfaces qui résultent de leur déformation et dont les rayons de courbure sont fonctions l'une de l'autre ne sont pas toutes des hélicoïdes. A cet effet, nous discuterons les équations (13) et (14) et le système (9), en supposant la quantité $V'_0 + V_0 r$ d'abord différente de zéro, puis égale à zéro.

8. *Hypothèse I.* — La quantité $V'_0 + V_0 r$ n'est pas nulle. — Si nous faisons

$$(15) \quad \frac{V'_0 + V_0 r}{V_1} = \tau,$$

nous pourrions remplacer le système (13) et (14) par celui-ci :

$$(16) \quad \frac{V'_1 - V_1 r}{V_1} = \frac{\sigma'}{\sigma}, \quad \sigma\sigma' - \sigma'^2 = \sigma^4.$$

La seconde équation s'intègre aisément; on trouve d'abord

$$dv = \frac{d\tau}{\tau \sqrt{\tau^2 + a}},$$

a étant une arbitraire; puis, avec une nouvelle arbitraire v_0 ,

$$(17) \quad \begin{cases} \tau = \frac{2\sqrt{a}}{e^{-\sqrt{a}(\nu-\nu_0)} - e^{\sqrt{a}(\nu-\nu_0)}}, \\ \frac{\tau'}{\tau} = \sqrt{\tau^2 + a} = \sqrt{a} \frac{e^{-\sqrt{a}(\nu-\nu_0)} + e^{\sqrt{a}(\nu-\nu_0)}}{e^{-\sqrt{a}(\nu-\nu_0)} - e^{\sqrt{a}(\nu-\nu_0)}}, \end{cases}$$

si la constante a n'est pas nulle; si $a = 0$, il vient

$$(18) \quad \tau = -\frac{1}{\nu - \nu_0}, \quad \frac{\tau'}{\tau} = -\frac{1}{\nu - \nu_0}.$$

Revenons aux équations (9), maintenant compatibles et qui s'écriront

$$(9)' \quad \begin{cases} -\frac{\partial \tau}{\partial u} = \tau \sin \tau - \frac{\tau'}{\tau}, \\ \frac{\partial \tau}{\partial v} = \tau \cos \tau. \end{cases}$$

En y substituant successivement les expressions (17) et (18) de τ , puis intégrant, nous obtenons, abstraction faite d'une constante qui s'ajouterait à u ,

$$\operatorname{tang} \left(\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{e^{-\frac{\sqrt{a}}{2}(\nu-\nu_0)} + e^{\frac{\sqrt{a}}{2}(\nu-\nu_0)}}{e^{-\frac{\sqrt{a}}{2}(\nu-\nu_0)} - e^{\frac{\sqrt{a}}{2}(\nu-\nu_0)}} \operatorname{tang} \frac{u\sqrt{a}}{2};$$

et, dans le cas où $a = 0$,

$$\operatorname{tang} \left(\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{u}{\nu - \nu_0}.$$

De ces formules, on déduit facilement les expressions de p et de μ , ayant

$$p = V_1 \cos \tau, \quad \mu = V_1 \sin \tau,$$

puis les autres rotations, ainsi définies,

$$q_1 = -p, \quad p_1 = \mu + V_0, \quad q = \mu - V_0, \quad r_1 = 0, \quad r = -\frac{W'}{W}.$$

Pour déterminer les fonctions V_0 et W , il faudrait intégrer le système formé par l'équation (15) et la première des équations (61)

$$(19) \quad \frac{V'_0 + V_0 r}{\sqrt{V_0^2 + r'^2}} = \sigma, \quad \frac{2V_0 V'_0 - r''}{2(V_0^2 - r'^2)} - r = \frac{\sigma'}{\sigma},$$

dont les seconds membres sont maintenant connus. Les fonctions V_0 et r une fois obtenues, on aurait W par une quadrature, r étant sa dérivée logarithmique changée de signe.

Mais il n'est pas nécessaire d'effectuer cette intégration pour voir que les quatre rotations p, q, p_1, q_1 dépendent à la fois de u et de v . Or on peut établir que pour tout hélicoïde à courbure totale variable, dont l'élément linéaire a été ramené à la forme $W^2(v)(du^2 + dv^2)$, les rotations du trièdre considéré sont des fonctions de v seulement.

D'autre part, on ne peut pas supposer que la courbure totale soit constante; car l'équation

$$\frac{r'}{W^2} = \text{const.},$$

qui exprime cette propriété, est contradictoire avec le système (19) où σ revêt l'une des formes (17) ou (18). C'est ce qu'on vérifierait sans difficulté. En conséquence, les surfaces dont nous venons de nous occuper ne sont pas des hélicoïdes.

9. *Hypothèse II.* — La quantité $V'_0 + V_0 r$ est nulle. Nous avons vu (n° 6) que cette hypothèse revient à supposer constante la courbure moyenne

$$\frac{V_0}{W} = \frac{1}{k}.$$

Alors l'équation (14) devient une identité; l'équation (13) donne

$$(13)' \quad \frac{V'_1}{V_1} - r = \frac{V'_1}{V_1} + \frac{W'}{W} = \text{const.} = z.$$

Nous trouvons ainsi les surfaces à courbure moyenne constante applicables sur des surfaces de révolution dont l'élément linéaire sera déterminé par l'équation (13)'. On en déduit d'abord

$$r_1 W = e^{2v} v^{-1} \quad (v_0 = \text{const.}),$$

puis, en remplaçant V_1 par son expression actuelle,

$$(20) \quad W^2 \left(\frac{W^2}{k^2} + \frac{d}{dv} \frac{W'}{W} \right) = e^{2z(\nu - \nu_0)}.$$

Telle est l'équation qui détermine la fonction W .

Dans l'hypothèse présente, les équations (9) donnent

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = z, \quad \frac{\partial \tau}{\partial v} = 0.$$

On voit que, si z n'est pas nul, on peut prendre $\tau = zu$, et supposer $\nu_0 = 0$. Ayant ainsi

$$V_0 = \frac{W}{k}, \quad V_1 = \frac{e^{z\nu}}{W}, \quad p = V_1 \cos zu, \quad \mu = V_1 \sin zu,$$

nous connaissons, grâce aux formules (1)' et (5), les six rotations p, p_1, q, q_1, r, r_1 , dont les quatre premières dépendront de u en même temps que de v . Les translations étant connues aussi,

$$\xi = \tau_1 = W, \quad \xi_1 = \tau_1 = 0,$$

à chaque expression de W vérifiant l'équation

$$W^2 \left(\frac{W^2}{k^2} + \frac{d}{dv} \frac{W'}{W} \right) = e^{2z\nu}$$

correspondra une surface à courbure moyenne constante $\frac{1}{k}$, qui ne sera pas un hélicoïde et qui sera applicable sur des surfaces de révolution à courbure moyenne variable, d'élément linéaire

$$ds^2 = W^2 (du^2 + dv^2).$$

Il convient de remarquer que notre analyse donne toutes les surfaces à courbure moyenne $\frac{1}{k}$ qui sont applicables sur des surfaces de révolution.

10. En supposant $z \neq 0$, nous avons écarté seulement les hélicoïdes, puisqu'ils sont caractérisés par des rotations indépendantes de u . Soit donc maintenant $z = 0$; cette supposition ne donne que des hélicoïdes à courbure moyenne constante, puisque les rotations sont fonctions de v seulement, la fonction τ se rédui-

sant à une constante, et elle les donne tous. L'élément linéaire de ces hélicoïdes dépend de l'équation

$$(20)' \quad W^2 \left(\frac{W^2}{k^2} + \frac{d}{dc} \frac{W'}{W} \right) = \text{const.},$$

qui s'intègre par une quadrature elliptique. Connaissant l'élément linéaire, on peut déterminer les surfaces elles-mêmes. On trouve ainsi pour le profil qui les engendre l'équation

$$dz = \frac{(\varphi^2 + h^2)(\varphi^2 + C) d\varphi}{\varphi \sqrt{(\varphi^2 + h^2)[k^2 \varphi^2 - (\varphi^2 + C)^2]}},$$

où C désigne une constante arbitraire, et h le pas, arbitraire aussi, du mouvement hélicoïdal; k est toujours l'inverse de la courbure moyenne donnée. Nous ne développerons pas ces résultats. Nous allons les retrouver en résolvant un problème plus général.

11. Proposons-nous de *déterminer tous les hélicoïdes dont la courbure totale et la courbure moyenne sont liées par une relation linéaire*. Les surfaces parallèles à un hélicoïde étant elles-mêmes des hélicoïdes, il résulte d'une remarque importante due à M. O. Bonnet (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, année 1853; p. 433) que les hélicoïdes dont la courbure totale et la courbure moyenne sont liées par une relation linéaire se déduisent des hélicoïdes à courbure totale constante, auxquels ils sont parallèles. Il faudrait donc déterminer ceux-ci; mais on peut donner une solution directe du problème. Soient M, N, P trois constantes données et soit

$$\frac{M}{R_1 R_2} + N \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + P = 0$$

la relation proposée. D'après les formules indiquées au n° 1, la fonction $\varphi(\varphi)$ qui définit le profil générateur des hélicoïdes sera déterminée par l'équation différentielle

$$M \frac{\varphi^3 \varphi' \varphi'' - h^2}{[\varphi^2(1 + \varphi'^2) + h^2]^2} + N \frac{\varphi(\varphi^2 + h^2) \varphi'' - [\varphi^2(1 + \varphi'^2) + h^2] \varphi'}{[\varphi^2(1 + \varphi'^2) + h^2]^3} + P = 0,$$

dont l'intégrale n'apparaît pas immédiatement. Mais on peut re-

marquer que les coefficients de M et de N ont respectivement pour expressions

$$-\frac{1}{2\rho} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^2}{\rho^2(1+\varphi'^2)+h^2}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^2\varphi'}{\sqrt{\rho^2(1+\varphi'^2)+h^2}}.$$

Par suite, en intégrant et désignant par Q une constante arbitraire, on aura

$$-\frac{M\rho^2}{\rho^2(1+\varphi'^2)+h^2} + \frac{2N\rho^2\varphi'}{\sqrt{\rho^2(1+\varphi'^2)+h^2}} + P\rho^2 + Q = 0.$$

Cette équation détermine φ' en fonction de ρ . On est donc ramené à une quadrature. On pourra trouver, en particulier, tous les hélicoïdes à courbure moyenne constante ou à courbure totale constante. Ces deux derniers problèmes dépendent des intégrales elliptiques. La remarque de M. O. Bonnet prouve qu'il en est de même du problème général et détermine le changement de variable et de fonction qui permettrait de le vérifier.



ERRATA.

Page 134, équation (3), *au lieu de* : $3(R^2 - \rho^2 + \rho'^2)$, *lisez* : $3(R^2 - \rho^2 + \rho'^2)^2$.

» 134, dernière ligne, *au lieu de* : $4Rr_a$, *lisez* : $4Rr_a^2$.

» 140, ligne 2 en remontant, *au lieu de* : *inserit*, *lisez* : *circonscrit*.

» 141, ligne 2 en descendant, *ajoutez* : Appelons o, o_a, o_b, o_c les centres des cercles tangents aux trois côtés.

» 141, ligne 4 en remontant, *au lieu de* : $\overline{O_a N_a}^2$, *lisez* : $\overline{o_a N_a}^2$.

» 141, dernière ligne, *au lieu de* : $(p - a)$, *lisez* : $(p - a)^2$.



TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XIX.

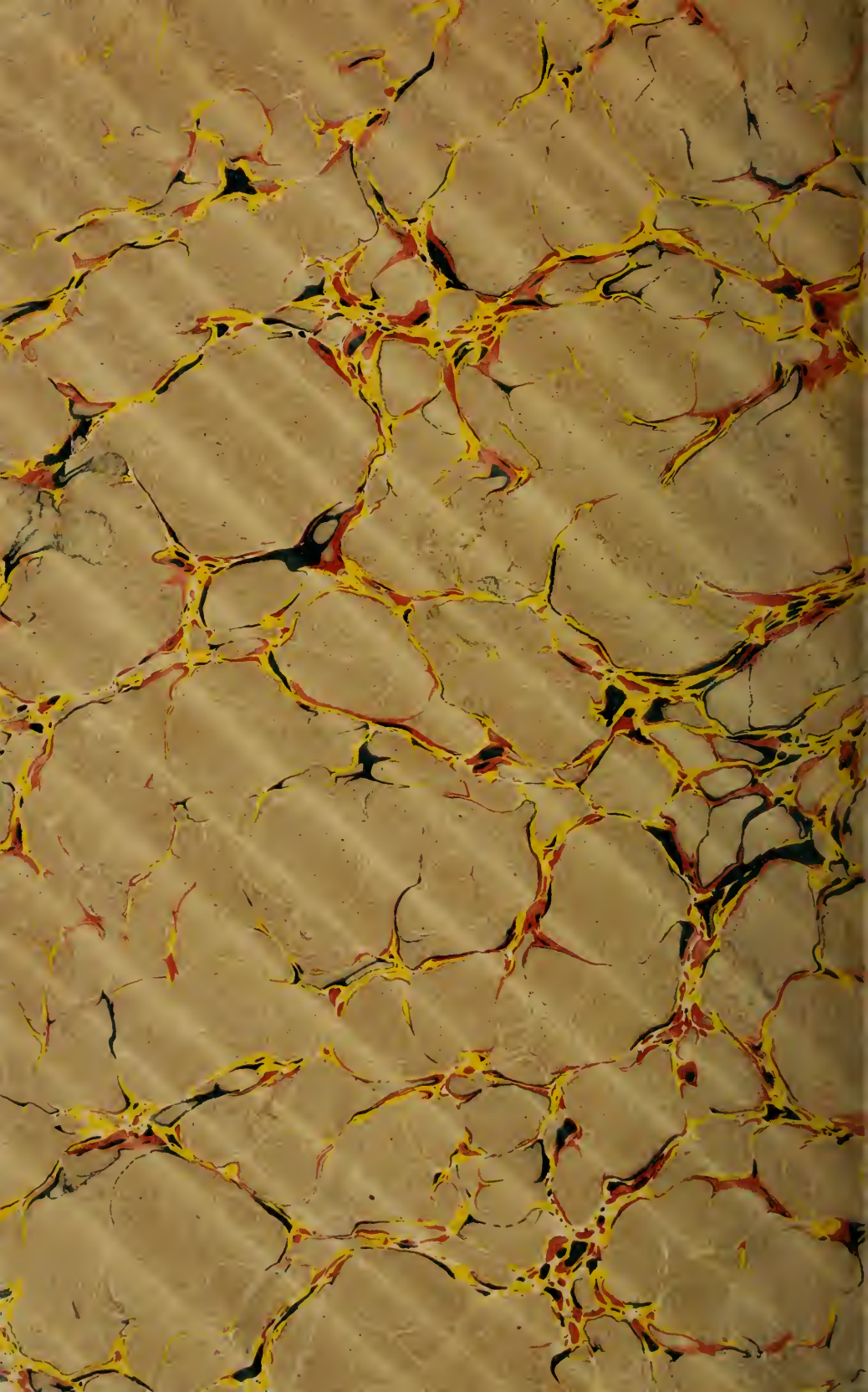
	Pages.
Liste des présidents de la Société mathématique de France depuis sa fondation.....	v
État de la Société mathématique de France au commencement de l'année 1891.....	vii
Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société mathématique de France échange son Bulletin.....	xv
Sur les surfaces développables; par M. GUSTAF KOBB.....	1
Propriété géométrique des coefficients du binôme; par M. C.-A. LAISANT..	4
Sur la rectification approximative d'un arc de courbe; par M. A.-E. PELLET.	5
Détermination directe de l'intégrale $f(\cos mx)^p(\cos m'x)^{p'}\dots(\sin nx)^q(\sin n'x)^{q'}\dots dx;$ par M. C.-A. LAISANT.....	8
Sur les fonctions sphériques; par M. F. CASPARY.....	11
Tétraèdre arithmétique; par M. C.-A. LAISANT.....	18
Comptes rendus des séances.....	24
Sur la liaison entre les expressions du rayon de courbure en coordonnées ponctuelles et en coordonnées tangentielles; par M. D'OCAGNE.....	26
Sur l'extension de la Géométrie cartésienne aux figures imaginaires; par M. C.-A. LAISANT.....	29
Sur l'impossibilité d'une fonction d'une seule variable à plus de deux périodes; par M. BEGHIN.....	31
Sur une détermination particulière du centre de courbure des lignes planes; par M. D'OCAGNE.....	31
Détermination de toutes les surfaces moulures applicables sur des surfaces de révolution; par M. RAFFY.....	34
Sur les substitutions linéaires d'une seule variable à coefficients périodiques; par M. D'OCAGNE.....	37
Remarques sur les lignes asymptotiques des surfaces réglées dont les génératrices appartiennent à une congruence linéaire; par M. CH. BIOCHE....	39
Sur les surfaces gauches dont les lignes de courbure possèdent une propriété donnée; par M. CH. BIOCHE.....	42
Remarque sur l'interpolation; par M. C.-A. LAISANT.....	44
Sur les sections circulaires du tore; par M. E. VICAIRE.....	46
Sur la réduction des fonctions entières algébriques; par M. PELLET.....	48
Quelques formules relatives aux fonctions hyperboliques; par M. C.-A. LAISANT.....	52
Comptes rendus des séances.....	54

	Pages.
Sur les surfaces moulures dont les lignes d'égale courbure sont parallèles; par M. RAFFY.....	55
Sur les congruences de droites du premier ordre et de la première classe; par M. G. FOURET.....	58
Sur le théorème général relatif à l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires; par M. ÉMILE PICARD.....	61
Sur la déformation des surfaces spirales; par M. RAFFY.....	65
Sur des potentiels conjugués; par M. APPELL.....	69
Mémoire sur les surfaces gauches rationnelles; par M. GENTY.....	70
Sur les fonctions d'une variable imaginaire; par M. FÉLIX LUCAS.....	93
Remarques sur les courbes brachistochrones; par M. APPELL.....	97
Sur une équerre cycloïdale propre à effectuer la rectification des arcs de cerce; par M. GUIMARAES.....	98
Sur les fonctions d'une variable imaginaire; par M. FÉLIX LUCAS.....	99
Sur le mouvement d'un point en coordonnées elliptiques; par M. APPELL.....	102
Sur la construction des cubiques cuspidales; par M. D'OCAGNE.....	103
Sur deux problèmes de permutations; par M. LAISANT.....	105
Relation entre les rayons de courbure des développées des courbes réci- proques; par M. GODEFROY.....	109
Développement du quotient de deux fonctions holomorphes; par M. DE PRESLE.....	114
Note sur les intersections de trois quadriques; par M. FÉLIX LUCAS.....	118
Sur une classe de surfaces gauches; par M. BIOCHE.....	120
Note sur l'interpolation successive; par M. LAISANT.....	121
Sur les surfaces réglées qui passent par une courbe et coupent sous un angle constant la développable des tangentes; par M. BIOCHE.....	123
Exemples de fonctions de plusieurs variables admettant un groupe de substitutions linéaires entières; par M. APPELL.....	124
Sur les points singuliers des équations différentielles à deux variables du premier ordre et du premier degré; par M. FOURET.....	127
Sur une transformation relative à la géométrie du triangle; par M. LEMOINE.....	132
Sur la transformation continue; par M. LEMOINE.....	135
Quelques remarques relatives aux fonctions réciproques; par M. LAISANT.....	141
Sur quelques théorèmes d'Analyse et d'Arithmétique; par M. CATALAN ...	145
Sur les équations abstraites du mouvement des machines; par M. F. LUCAS.....	152
Remarques sur l'intégration des équations aux dérivées partielles; par M. ANTONARI.....	154
Sur certaines surfaces dont les rayons de courbure sont liés par une rela- tion; par M. RAFFY.....	158

FIN DE LA TABLE DU TOME XIX.







QA
1
S59
t.19
Physical &
Applied Sci.
Serials

Société mathématique de
France, Paris
Bulletin

W111111

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

